



# Modélisation et simulation numérique de structures articulées flexibles

Henri Chajmowicz

## ► To cite this version:

Henri Chajmowicz. Modélisation et simulation numérique de structures articulées flexibles. Modélisation et simulation. Ecole nationale des ponts et chaussées - ENPC PARIS / MARNE LA VALLEE, 1996. Français. NNT: . pastel-00569038

**HAL Id: pastel-00569038**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00569038>**

Submitted on 24 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

X

présentée à  
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

par  
Henri CHAJMOWICZ

pour obtenir le titre de  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité :  
Mathématiques, Informatique

Sujet de la thèse :

## MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE DE STRUCTURES ARTICULÉES FLEXIBLES

Soutenue le 20 Juin 1996 devant le jury composé de :

M.	Patrick LE TALLEC	Président
Mme	Annie RAOULT	Rapporteur
M.	Juan-Manuel VIAÑO	Rapporteur
MM.	Michel BERNADOU	Directeur de thèse
	Jean-François BOURGAT	Examineur
	Bernard HALPHEN	Examineur

08





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>A Problème statique direct</b>	<b>11</b>
<b>1 Approche convective</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction et notations . . . . .	13
1.2 Modélisation mécanique . . . . .	14
1.3 Conditions aux limites et de jonction . . . . .	18
1.3.1 Conditions aux limites . . . . .	18
1.3.2 Modèle de jonction . . . . .	19
1.4 Formulation variationnelle . . . . .	20
1.4.1 Cadre fonctionnel . . . . .	20
1.4.2 Existence et unicité . . . . .	22
1.4.3 Retour sur le modèle de jonction . . . . .	27
1.5 Approximation par éléments finis . . . . .	28
1.6 Tests numériques . . . . .	34
1.6.1 Structures chargées dans leur plan . . . . .	34
1.6.2 Structures sous chargement général . . . . .	42
<b>2 Approche globale</b>	<b>53</b>
2.1 Introduction et notations . . . . .	53
2.2 Modèle mécanique . . . . .	55
2.3 Conditions aux limites, contraintes, conditions de jonction . . . . .	56
2.3.1 Conditions aux limites et contraintes . . . . .	56
2.3.2 Modèle de jonction . . . . .	57
2.4 Formulation variationnelle . . . . .	60
2.4.1 Cadre fonctionnel . . . . .	60
2.4.2 Formulation variationnelle . . . . .	63
2.4.3 Résultat d'existence . . . . .	67
2.5 Un cas simplifié: le modèle inextensible . . . . .	74
2.5.1 Cadre fonctionnel . . . . .	74
2.5.2 Formulation variationnelle . . . . .	75
2.5.3 Résultat d'existence . . . . .	77



2.6	Résolution numérique pour le cas inextensible . . . . .	78
2.6.1	Approximation par éléments finis . . . . .	78
2.6.2	Résultats de convergence . . . . .	80
2.6.3	Linéarisation de la formulation variationnelle . . . . .	85
2.6.4	Résolution du problème approché . . . . .	89
2.7	Tests numériques . . . . .	96
2.7.1	Cas sans raccord . . . . .	96
2.7.2	Cas avec raccord . . . . .	106
2.8	Comparaison avec l'approche convective . . . . .	111

## **B Problème dynamique direct 119**

<b>1</b>	<b>Approche convective</b>	<b>121</b>
1.1	Introduction et notations . . . . .	121
1.2	Modélisation mécanique . . . . .	122
1.2.1	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	125
1.2.2	Loi de comportement - Equations du mouvement . . . . .	126
1.3	Conditions aux limites et de jonction . . . . .	132
1.3.1	Conditions aux limites . . . . .	132
1.3.2	Modèle de jonction . . . . .	132
1.4	Formulation variationnelle . . . . .	133
1.4.1	Cadre fonctionnel . . . . .	133
1.4.2	Formulation variationnelle . . . . .	134
1.4.3	Existence et unicité . . . . .	135
<b>2</b>	<b>Approche globale</b>	<b>147</b>
2.1	Introduction et notations . . . . .	147
2.2	Modèle mécanique . . . . .	147
2.3	Contraintes, conditions aux limites et de jonction, conditions initiales	148
2.3.1	Contraintes et conditions aux limites . . . . .	148
2.3.2	Modèle de jonction . . . . .	149
2.3.3	Conditions initiales . . . . .	150
2.4	Formulation variationnelle . . . . .	150
2.4.1	Cadre fonctionnel . . . . .	150
2.4.2	Formulation variationnelle . . . . .	151
2.4.3	Discretisation en temps . . . . .	154
2.5	Résolution numérique pour le cas inextensible . . . . .	156
2.5.1	Cas sans raccord : Poutre en rotation . . . . .	156
2.5.2	Poutres en flexion . . . . .	160

## **C Un problème inverse 165**

---

<b>Conclusion</b>	<b>181</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>
<b>Annexe A : Représentation des rotations finies</b>	<b>192</b>
A.1 Angles d'Euler . . . . .	193
A.2 Vecteur-rotation . . . . .	194
A.3 Quaternions . . . . .	196
A.3.1 Le corps des quaternions . . . . .	196
A.3.2 Représentation paramétrique des rotations . . . . .	197



# Introduction

---

Un bras *souple*, également appelé mécanisme en chaîne ouverte souple, est un système de corps flexibles (maillons) reliés par des articulations permettant divers types de mouvements relatifs, qui sont des mouvements de corps rigides non infinitésimaux, mais d'amplitudes généralement limitées par des butées mécaniques. Ce type de système intervient dans l'étude des structures spatiales déployables (Fig. 0.7), des satellites, des pales d'hélicoptères (Fig. 0.8) ou des bras manipulateurs de robots (Fig. 0.6). L'étude de leur comportement mécanique et leur simulation numérique représente donc un problème d'ingénierie important.

L'intérêt pour la modélisation et l'étude du positionnement ou du mouvement des bras *rigides* ou assimilés est apparu depuis fort longtemps (Fig. 0.9) et c'est un sujet bien cerné par la communauté scientifique. La modélisation la plus couramment utilisée est celle de **Denavit-Hartenberg** [1955], étendue et améliorée par **Khalil & Kleinfinger** [1986]. Elle permet d'établir facilement le *modèle géométrique direct*, donnant la position de l'extrémité du dernier maillon du bras à partir des paramètres caractérisant les articulations de la chaîne. Le *modèle géométrique inverse* a fait l'objet des travaux de **Pieper** [1968], **Paul** [1981] qui linéarisent la matrice de passage du mécanisme et emploient un solveur du type Newton-Raphson, ou plus récemment de **Sciavicco & Siciliano** [1987]. Quant aux problèmes dynamiques, deux types de formalismes sont couramment utilisés pour les traiter :

- **Formalisme de Lagrange** - basé sur des méthodes énergétiques : **Paul** [1981], **Megahed** [1984], **Renaud** [1985]. Ce formalisme est bien adapté à l'étude du *modèle dynamique direct*, donnant la trajectoire de l'extrémité du dernier maillon du bras à partir de l'évolution des paramètres caractérisant les articulations de la chaîne.
- **Formalisme de Newton-Euler** - basé sur l'étude des équations d'équilibre : **Hartoch, McGhee, Orin & Vukobratović** [1979], **Khalil & Kleinfinger** [1987], **Renaud** [1987]. Ce formalisme est bien adapté à l'étude du *modèle dynamique inverse*, donnant l'histoire des paramètres articulaires à imposer pour obtenir une trajectoire donnée de l'extrémité du dernier maillon du bras.

Cependant, les nouveaux besoins technologiques de l'industrie spatiale et de la robotique font croître la demande en simulations numériques précises des performances

des bras articulés. Les tendances actuelles dans la conception des nouveaux mécanismes sont l'utilisation de composants très légers, très élancés et de matériaux nouveaux, de type composites. De la même façon, l'accent est mis sur les performances de ces équipements en matière de grandes vitesses d'utilisation et de précision accrue dans le positionnement de composants à flexibilités non négligeables.

L'étude mathématique du mouvement de ces systèmes flexibles fait cependant partie des problèmes ouverts.

Le but de ce travail est de donner un cadre mathématique à l'étude (dans le cas statique et dans le cas dynamique évolutif) des déplacements et des déformations d'un bras souple pesant, portant une charge utile à son extrémité. Notre étude s'articule autour de deux types de problèmes :

- **Problème direct** : Le chargement de la structure est connu. On cherche à calculer la position (ainsi que la vitesse et l'accélération à un instant  $T$  donné dans le cas dynamique) de l'ensemble de la structure et particulièrement de l'extrémité du dernier maillon du bras.
- **Problème inverse (cas dynamique)** : La trajectoire que l'on souhaite imposer à l'extrémité du dernier maillon du bras est connue. On cherche à déterminer le chargement à imposer pour l'obtenir.

Il importe tout d'abord de choisir un bon modèle mécanique pour décrire les maillons composant le bras. A priori, ces maillons sont des corps tridimensionnels. Cependant, d'après ce qui a été dit plus haut, notre étude n'a d'intérêt que dans le cas de composants élancés. Ceci nous amène à considérer des **modèles unidimensionnels** de poutres évoluant dans un espace **tridimensionnel**.

Du fait des grands déplacements de corps rigide des maillons, les problèmes envisagés sont a priori **géométriquement non-linéaires**. Le développement de méthodes **numériques** appropriées pour modéliser ces non-linéarités géométriques a été l'objet de nombreuses études au cours des dernières années.

Une première approche consiste à se placer dans l'hypothèse où les poutres constituant la chaîne sont animées de grands mouvements rigides, auxquels se superposent de petits déplacements élastiques. On associe à chaque poutre un repère  $\mathcal{R}$  qui suit son mouvement rigide. La déformation élastique de la poutre est alors décrite relativement à ce repère (**Agrawal & Shabana [1986]**, **Cardona, Géradin [1989]**). De cette façon, des codes d'analyse de multi-corps rigides ont pu être étendus pour tenir compte de la flexibilité de la structure (**Haug & Yoo [1986]**).

Pour des structures consistant en un corps rigide auquel est relié un corps flexible, le repère  $\mathcal{R}$  est animé du même mouvement rigide que le corps rigide. Pour des structures quelconques, pour lesquelles le choix des repères  $\mathcal{R}$  n'est pas simple, on peut les construire de façon à suivre un mouvement rigide moyen de la structure, afin de minimiser la déformation relative (**Kane & Levinson** [1981]).

L'approche précédente - que nous nommerons **approche convective** dans toute la suite de ce travail - est limitée par l'hypothèse de petites déformations élastiques qu'elle implique. Cependant, il peut être intéressant, pour certaines applications, de considérer un modèle mécanique et des mesures de déformation qui soient compatibles avec de grandes déformations. Des mesures de déformation non-linéaires ont ainsi été introduites dans la modélisation précédente, notamment par **Christensen & Lee** [1986].

Une autre approche - l'approche **corotationnelle** - se base sur une discrétisation de type élément fini des maillons de la structure et sur l'introduction de repères de référence au niveau *local* de *chaque élément fini*. Les repères locaux représentent ainsi le mouvement rigide d'ensemble de l'élément auquel ils sont attachés. Cette approche a été employée pour modéliser les grandes déformations d'éléments de poutres en utilisant des formulations lagrangiennes de la mécanique des milieux continus en grandes déformations (**Bathe & Bolourchi** [1979]). Elle est identique à l'approche introduite par **Belytschko, Klein & Schwer** [1977], qui consiste à extraire les déplacements rigides d'un élément de son déplacement total, et ceci avant de calculer ses déformations élastiques.

Basé sur des travaux antérieurs d'**Antman & Kenney** [1981] et de **Simo** [1985], un troisième type de modélisation a été envisagé récemment. Le déplacement de la poutre est référencé par rapport à un repère inertiel fixe et une configuration de référence, et il n'est pas fait de séparation entre sa partie élastique et sa partie rigide. Moyennant un choix correct des variables servant à décrire ce déplacement, on montre que dans le cas dynamique les équations du mouvement ont la même forme que dans le cas des bras rigides (**Downer** [1990]). Outre cet avantage, cette modélisation prend en compte *sans approximation* tous les types de déformations élastiques (**Bourgat, Le Tallec & Mani** [1988]), y compris le cisaillement transverse et la torsion. Nous nous référerons à cette approche sous le nom d'**approche globale** dans toute la suite de ce travail.

Un autre point essentiel de la modélisation consiste à adopter un modèle pour les jonctions entre les poutres composant le système. Pour ce faire nous devons d'abord choisir un modèle géométrique pour notre jonction. Les modèles géométriques les

plus courants sont recensés ci-après.

### Liaison prismatique

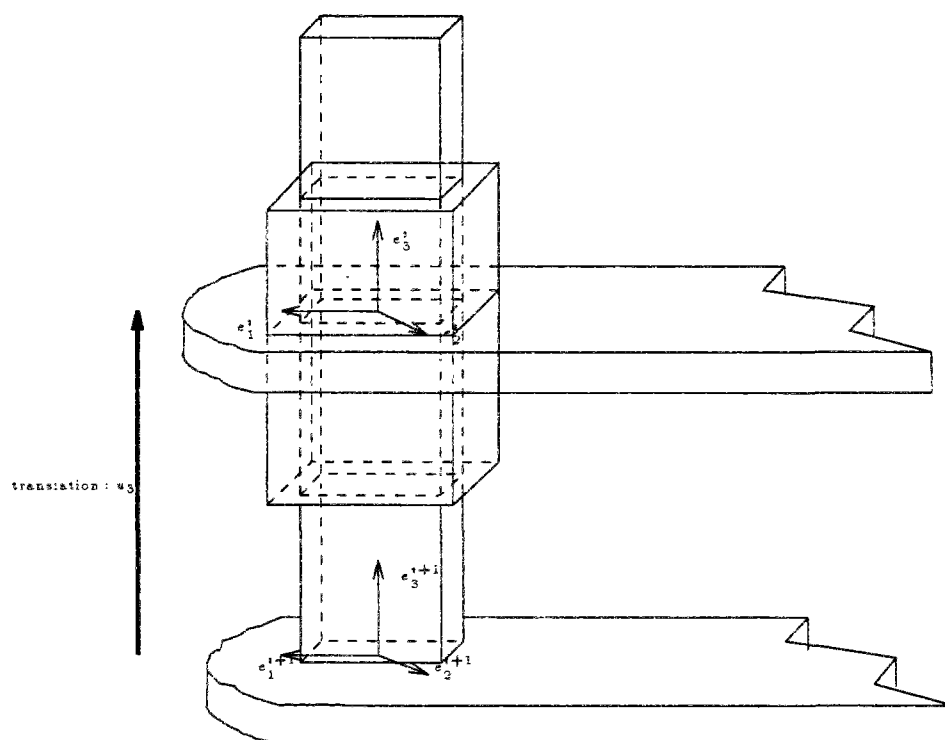


FIG. 0.1 - Géométrie de la liaison prismatique

Ce type de liaison ne laisse libre que la translation relative  $u_3$  suivant l'axe de l'articulation (figure 0.1).

### Liaison pivot

Ce type de liaison ne laisse libre que la rotation  $\theta$  suivant l'axe de l'articulation (figure 0.2).

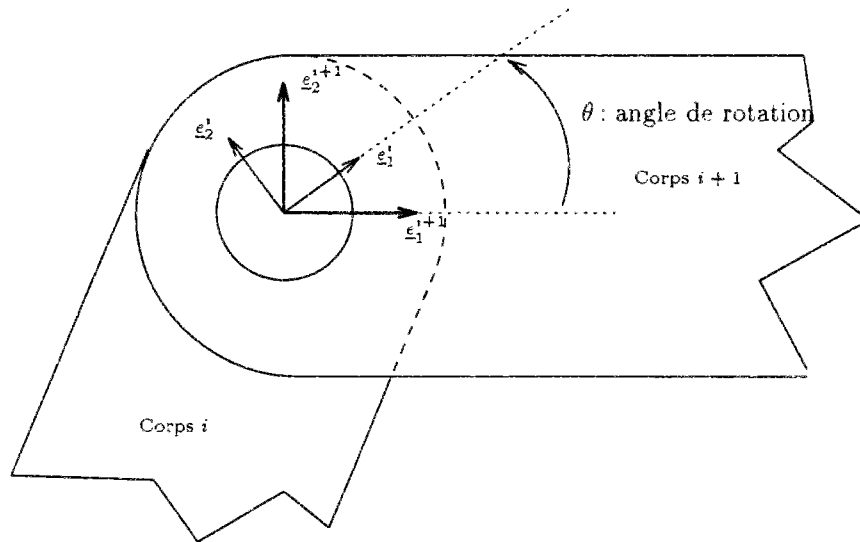


FIG. 0.2 - Géométrie de la liaison pivot

### Liaison cylindrique

Ce type de liaison est la composée des deux précédentes. Elle laisse deux degrés de liberté, translation  $u_3$  et rotation  $\theta$  suivant l'axe de l'articulation (figure 0.3).

### Joint de Cardan

Ce type de liaison laisse deux degrés de liberté en rotation, et aucun en translation (figure 0.4).

### Liaison sphérique

Ce type de liaison ne laisse aucun degré de liberté en translation (figure 0.5).

Notre modèle de jonction doit être physiquement réaliste, doit permettre un traitement numérique efficace et doit enfin se prêter à l'analyse mathématique du problème. Toutes ces considérations nous ont amenés aux deux hypothèses suivantes :

- **Hypothèse géométrique :** Les articulations sont du type pivot ou sphé-



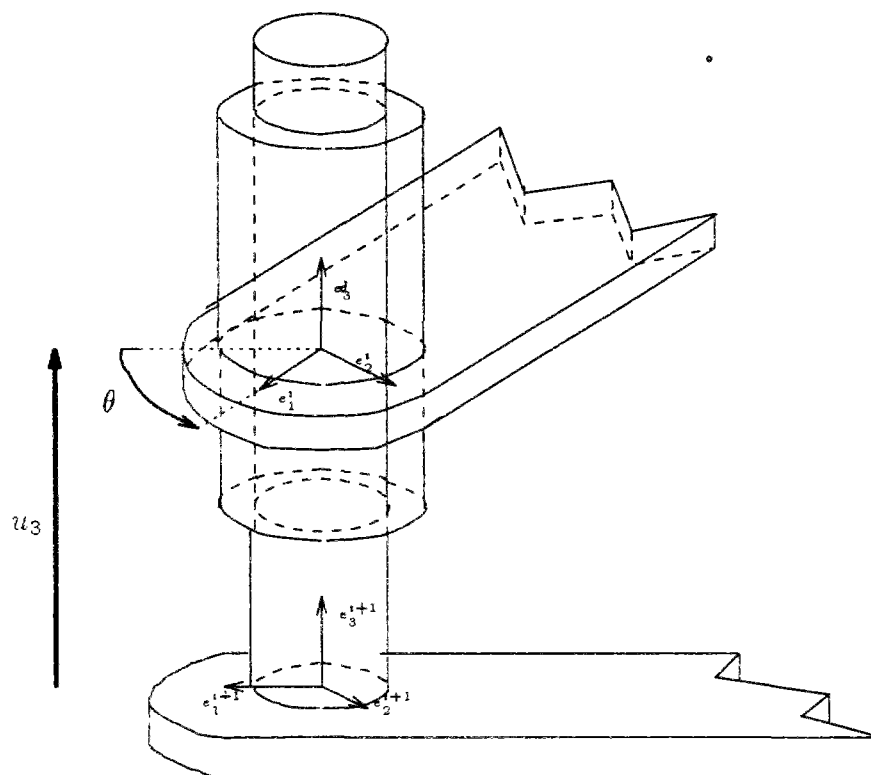


FIG. 0.3 - Géométrie de la liaison cylindrique

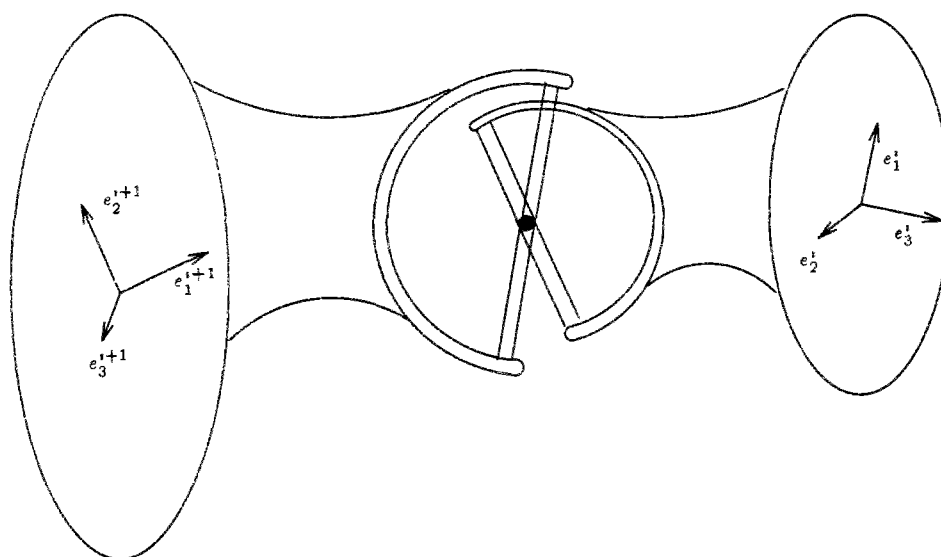
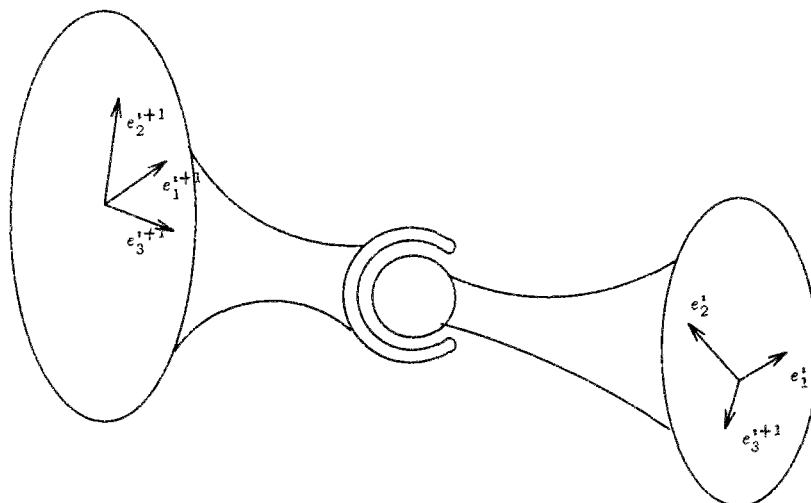


FIG. 0.4 - Géométrie du joint de Cardan

FIG. 0.5 - *Géométrie de la liaison sphérique*

rique: les seuls mouvements relatifs possibles sont des mouvements de rotation.

- **Hypothèse mécanique:** Nous supposons que l'articulation transmet intégralement les efforts et les déplacements. Nous supposons également que s'exerce à l'articulation un moment de type "moment de rappel". Ce moment a la direction de l'axe de l'articulation et il est proportionnel à la rotation articulaire. L'expression de ce moment dépend essentiellement du type d'approche (convective ou globale) et nous y reviendrons plus loin.

Notre étude est divisée en trois parties :

La première partie est consacrée au problème direct statique. Elle est elle-même divisée en deux chapitres. Le premier chapitre est consacré à l'approche convective pour le problème statique direct. Nous faisons quelques rappels de théorie de poutres en petites déformations. Nous écrivons ensuite les équations d'équilibre et la formulation variationnelle correspondante et nous établissons un théorème d'existence et d'unicité du déplacement élastique. Nous donnons enfin les détails de l'implémentation et quelques résultats numériques.

Dans le second chapitre, nous étudions l'approche globale du problème statique direct. Nous donnons un théorème d'existence et nous détaillons l'implémentation

dans un cas simple (modèle sans allongement ni cisaillement).

La seconde partie est consacrée au problème direct dynamique. Elle est également divisée en deux chapitres. Le premier traite de l'approche convective. Nous considérons, dans ce chapitre, que le mouvement de corps rigide de la structure est une donnée du problème. Ceci correspond par exemple à la situation où, connaissant les caractéristiques mécaniques d'une structure, on cherche à déterminer l'importance de sa flexibilité en fonction de conditions d'utilisation connues a priori. Les seules inconnues du problème seront donc les déplacements élastiques de la structure. Nous établissons la formulation variationnelle des équations du mouvement ainsi qu'un résultat d'existence et d'unicité des déplacements élastiques.

La second chapitre est consacré à l'approche globale. Nous réduisons le problème à une suite de problèmes statiques et nous donnons quelques résultats de simulations numériques.

Enfin, la troisième partie est consacrée à un problème inverse type. Nous nous plaçons dans le cadre de l'approche convective dynamique et dans le cas d'une seule poutre entraînée en rotation. En nous basant sur une discrétisation en espace du problème direct, nous montrons qu'il est possible de minimiser sur l'espace des vitesses angulaires admissibles, un critère concernant le suivi d'une trajectoire par l'extrémité libre de la poutre.

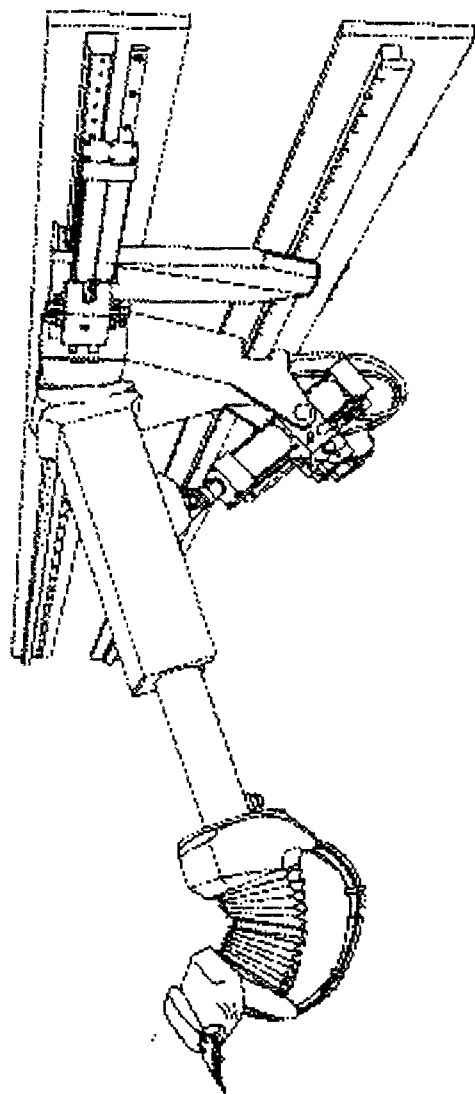


FIG. 0.6 - *Bras manipulateur*

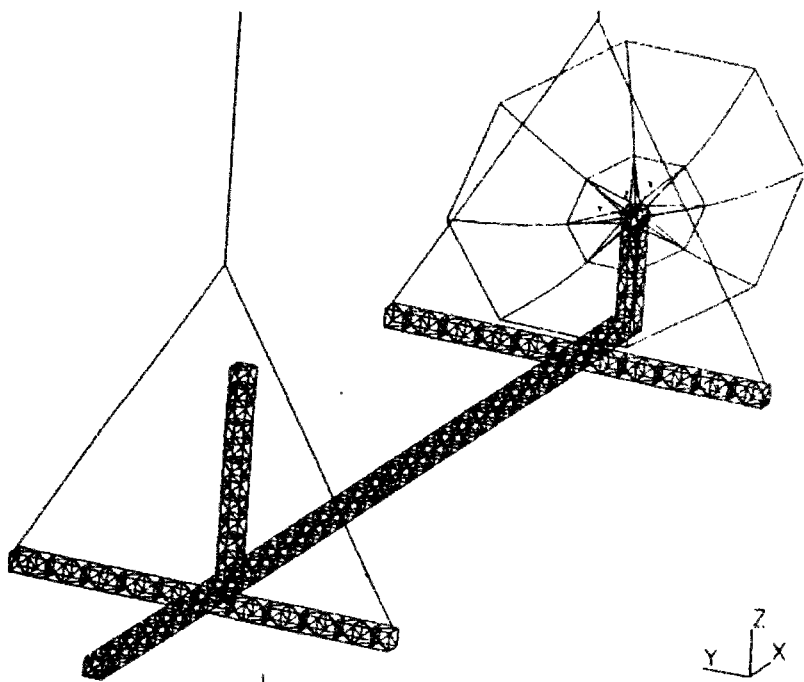


FIG. 0.7 - *Structure spatiale*

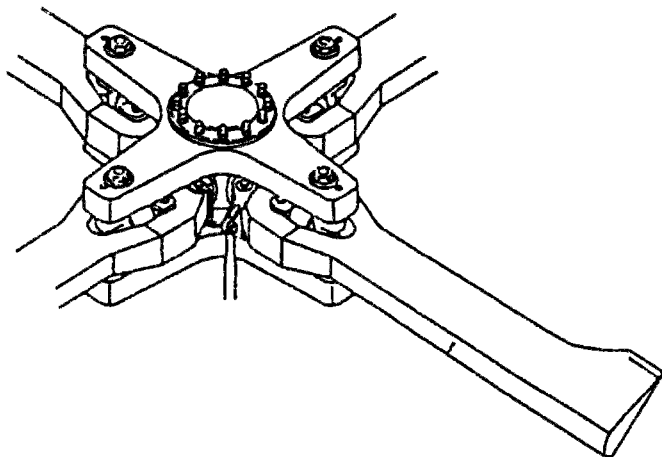


FIG. 0.8 - *Mechanical joint*

190 Model.)

L. A. RYGG.  
MECHANICAL HORSE.

No. 491,227.

Patented Feb. 14, 1893.

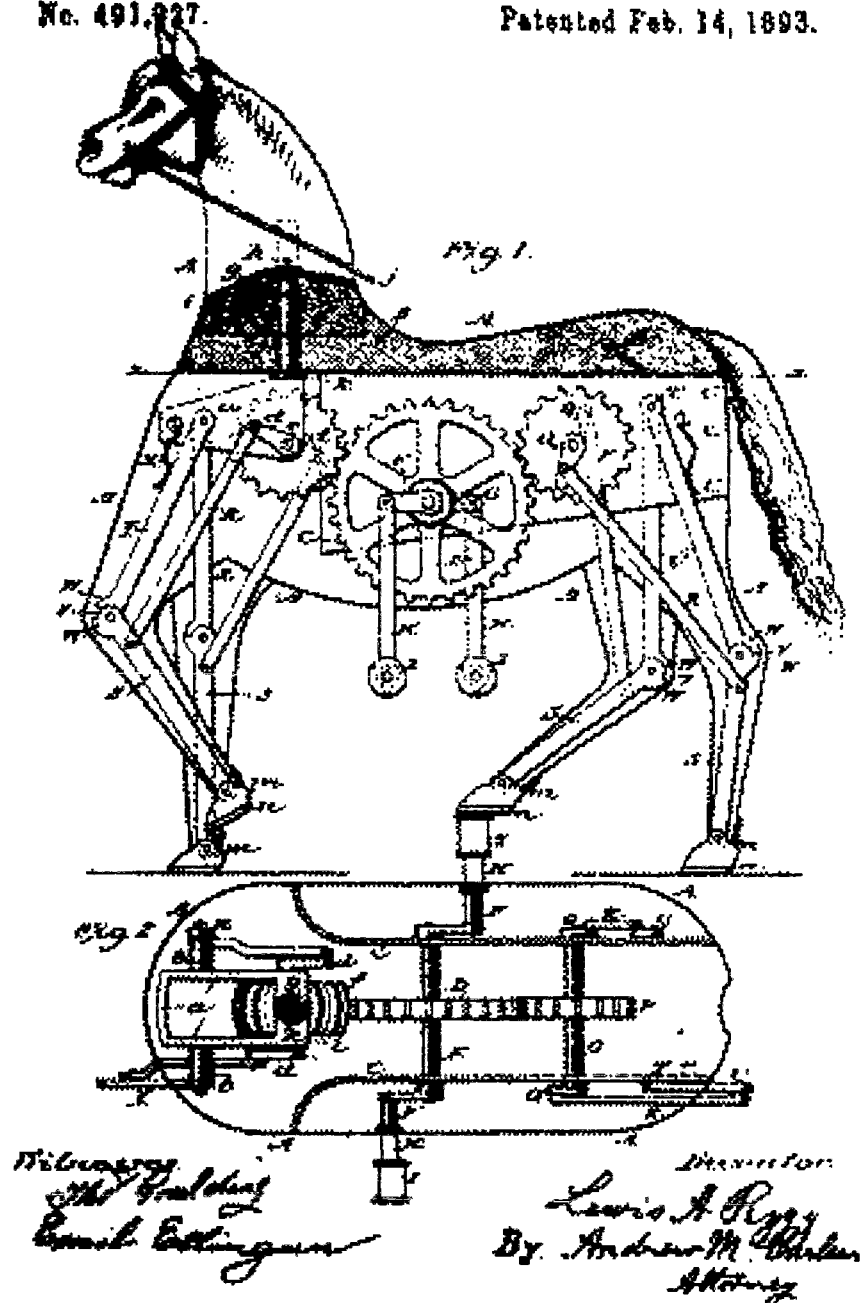


FIG. 0.9 - Exemple de mécanisme

## **Partie A**

### **Problème statique direct**



# Chapitre 1

## Approche convective

---

### 1.1 Introduction et notations

Nous considérons une chaîne ouverte simple, constituée de  $nt$  poutres flexibles. Nous supposons que la chaîne est encastrée dans un support rigide fixe en l'une de ses extrémités, et nous attribuons l'indice 1 à la poutre ainsi encastrée. Nous numérotions ensuite les poutres de la chaîne par ordre croissant à partir de la poutre encastrée.

Nous devons garder à l'esprit que la poutre  $i$ , solide monodimensionnel, modélise la barre  $i$ , solide tridimensionnel élancé. Nous nous donnons donc une configuration de référence *physique* (configuration non déformée), dans laquelle chacune des barres associées aux poutres de la chaîne est considérée comme un cylindre droit, d'axe moyen constitué par la poutre associée. Nous pouvons définir, pour la barre  $i$ , une base principale d'inertie  $\{e^i\} = (\underline{e}_1^i, \underline{e}_2^i, \underline{e}_3^i)$ , le vecteur  $\underline{e}_1^i$  étant choisi de façon à orienter la poutre  $i$  [supposée *droite* et donc assimilable à un segment  $[0, l_i]$ ] en configuration de référence. Le point de contact  $O_i$  entre la poutre  $i$  et la poutre  $i - 1$  est choisi comme origine du repère principal d'inertie  $[O_i, \{e^i\}]$  de la barre  $i$ . Les coordonnées dans  $[O_i, \{e^i\}]$  sont notées  $(x_i, y_i, z_i)$ . Nous introduisons de plus les quantités mécaniques suivantes :

- $\phi^i(y_i, z_i)$  : fonction de gauchissement de la barre  $i$  ;
- $E^i, \nu^i, \lambda^i, \mu^i$  : module d'Young, coefficient de Poisson et coefficients de Lamé de la barre  $i$  ;
- $\underline{u}^i(x_i)$  : champ de déplacement élastique de la ligne moyenne de la barre  $i$ , de composantes  $(u_1^i, u_2^i, u_3^i)$  dans  $[O_i, \{e^i\}]$  ;
- $\underline{\theta}^i(x_i)$  : champ de rotation élastique de la section d'abscisse  $x_i$  de la barre  $i$ , de composantes  $(\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i)$  dans  $[O_i, \{e^i\}]$  ;



- $\underline{f}^i(x_i)$ : densité linéique d'efforts extérieurs exercés sur la barre  $i$ , de composantes  $(f_1^i, f_2^i, f_3^i)$  dans  $[O_i, \{e^i\}]$ ;
- $\mathcal{F}$ : force appliquée à l'extrémité du dernier maillon de la chaîne, de composantes  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$  dans  $[O_{nt}, \{e^{nt}\}]$ ,
- $\mathcal{M}$ : moment appliqué à l'extrémité du dernier maillon de la chaîne, de composantes  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$  dans  $[O_{nt}, \{e^{nt}\}]$ .

ainsi que les quantités géométriques :

- $l_i$ : longueur de la poutre  $i$ ;
- $\omega^i(x_i)$ : section droite d'abscisse  $x_i$  de la barre  $i$ ,

$$S^i = \int_{\omega^i} dy_i dz_i, \quad I_2^i = \int_{\omega^i} (z_i)^2 dy_i dz_i, \quad I_3^i = \int_{\omega^i} (y_i)^2 dy_i dz_i, \quad J^i = I_2^i + I_3^i.$$

Nous introduisons le repère cartésien absolu  $[O, \{e^a\}] = [O, (\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)]$  et nous notons enfin par un ' la dérivation par rapport à  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, nt$ .

Nous nous restreignons dans la suite de l'étude, au cas où  $\omega^i$  ne dépend pas de  $x_i$ .

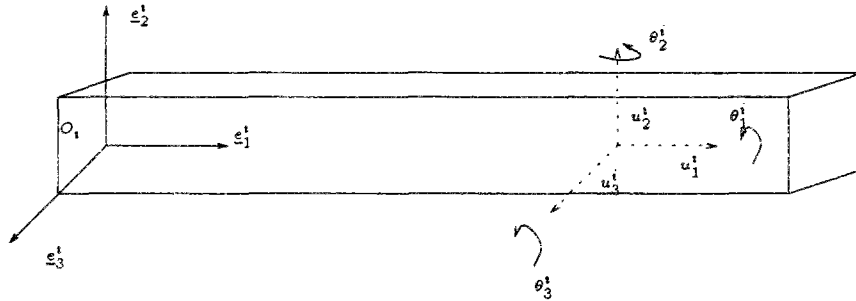


FIG. 1.1 - Déplacements d'une barre

## 1.2 Modélisation mécanique

Nous rappelons dans cette section la démarche classique d'obtention des lois de comportement pour une poutre *droite*, lois qui seront utilisées dans l'analyse mathématique et l'étude numérique du problème. Cette démarche consiste à écrire l'énergie

de déformation d'un solide élastique en le considérant successivement comme un milieu curviligne monodimensionnel (poutre) puis comme un milieu tridimensionnel élastique (barre).

Une poutre droite, milieu curviligne monodimensionnel, étant un modèle idéalisé d'une structure tridimensionnelle, il est d'usage de représenter le déplacement du point courant de cette poutre par un torseur de résultante  $\underline{u}(x)$  et de moment  $\underline{\theta}(x)$ ,  $x \in [0; l]$ .

On montre alors (Salençon [1988.2], Chap. XI, 3.2) que les efforts intérieurs au point courant de la poutre sont représentés par un torseur de résultante  $\underline{X}(x)$  et de moment  $\underline{\Gamma}(x)$ . On décompose les éléments de réduction de ce torseur dans la base principale d'inertie  $\{\underline{e}\}$  de la barre et on écrit :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \underline{X}(x) &= N(x)\underline{e}_1 + V_2(x)\underline{e}_2 + V_3(x)\underline{e}_3, \\ \underline{\Gamma}(x) &= C(x)\underline{e}_1 + M_2(x)\underline{e}_2 + M_3(x)\underline{e}_3. \end{aligned}$$

L'interprétation physique, relativement à la base  $\{\underline{e}\}$ , de ces quantités est la suivante :

- $N(x)$  représente un effort de traction-compression ;
- $V_2(x)$  et  $V_3(x)$  représentent des efforts de cisaillement ;
- $C(x)$  représente un moment de torsion ;
- $M_2(x)$  et  $M_3(x)$  représentent des moments de flexion.

Une classe particulière de déplacements admissibles est constituée par les déplacements de Navier-Bernoulli, pour lesquels toute section normale à l'axe moyen de la barre le reste au cours de la déformation. On montre que cette condition s'écrit :

$$(1.2) \quad \forall x \in [0, l] : \theta_2(x)\underline{e}_2 + \theta_3(x)\underline{e}_3 \approx \underline{e}_1 \wedge \underline{u}'(x)$$

Sous la condition (1.2), l'énergie élastique de déformation du milieu curviligne se réduit à :

$$W_c^* = \frac{1}{2} \int_{[0, l]} (N(x) u_1'(x) + C(x) \theta_1'(x) - M_2(x) u_3''(x) + M_3(x) u_2''(x)) dx$$

La distribution des efforts intérieurs restant la même, on peut envisager le solide modélisé sous son aspect tridimensionnel. Il est d'usage de considérer, pour une abscisse  $x$  donnée, la tranche de milieu tridimensionnel élastique, comprise entre les sections droites d'abscisses  $x - \epsilon$  et  $x + \epsilon$  et de s'intéresser à l'équilibre de cette tranche, soumise à la distribution (1.1) d'efforts intérieurs. Si le paramètre  $\epsilon$  est

suffisamment petit, on peut considérer que la tranche est en équilibre sous l'effet de deux torseurs d'efforts surfaciques : un torseur de résultante  $N(x)$  et de moment résultant  $[C(x), M_2(x), M_3(x)]$  appliqué sur la section d'abscisse  $x + \epsilon$  et un torseur de résultante  $-N(x)$  et de moment résultant  $[-C(x), -M_2(x), -M_3(x)]$  appliqué sur la section d'abscisse  $x - \epsilon$ .

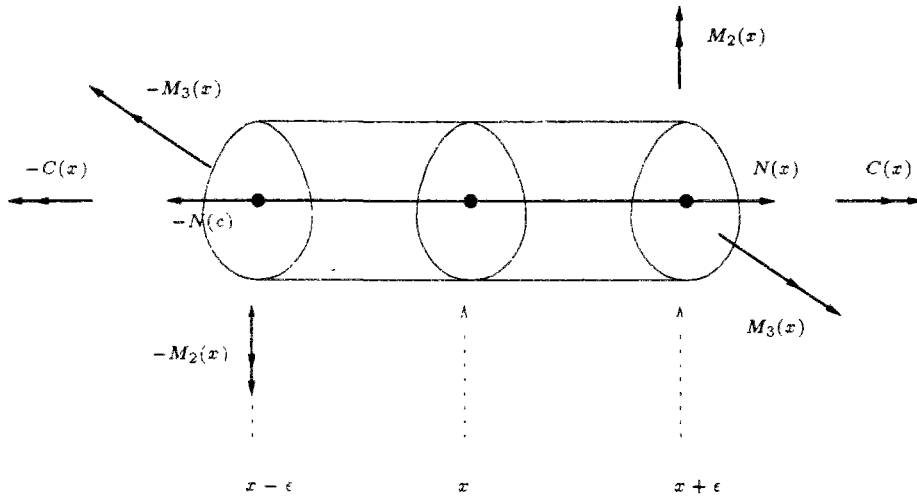


FIG. 1.2 - *Efforts dans la tranche tridimensionnelle*

On peut alors montrer (Salençon [1988.2], Chap. XII, 2.4) que le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}_\epsilon$  dans la tranche a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\epsilon,[1,1]} &= \frac{N(x)}{S} - \frac{M_3(x)}{I_3} y + \frac{M_2(x)}{I_2} z, \\
 \sigma_{\epsilon,[1,2]} &= \frac{C(x)}{J^*} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right), \\
 &= \sigma_{\epsilon,[2,1]}, \\
 \sigma_{\epsilon,[1,3]} &= \frac{C(x)}{J^*} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right), \\
 &= \sigma_{\epsilon,[3,1]}, \\
 \sigma_{\epsilon,[2,2]} &= 0, \\
 \sigma_{\epsilon,[2,3]} &= \sigma_{\epsilon,[3,2]} = 0, \\
 \sigma_{\epsilon,[3,3]} &= 0,
 \end{aligned}$$

où on a posé :

$$J^* = \int_{\omega} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right)^2 \right) dy dz.$$

Le tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\underline{\varepsilon}}_\epsilon$  associé à  $\underline{\underline{\sigma}}_\epsilon$  par la loi de comportement tridimensionnelle :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_\epsilon = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}_\epsilon - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}_\epsilon)$$

a pour expression :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\epsilon,[1,1]} &= \frac{N(x)}{ES} - \frac{M_3(x)}{EI_3} y + \frac{M_2(x)}{EI_2} z, \\ \varepsilon_{\epsilon,[1,2]} &= \frac{C(x)}{2\mu J^*} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right), \\ &= \varepsilon_{\epsilon,[2,1]}, \\ \varepsilon_{\epsilon,[1,3]} &= \frac{C(x)}{2\mu J^*} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right), \\ &= \varepsilon_{\epsilon,[3,1]}, \\ \varepsilon_{\epsilon,[2,2]} &= -\nu \varepsilon_{\epsilon,[1,1]}, \\ \varepsilon_{\epsilon,[2,3]} &= \varepsilon_{\epsilon,[3,2]} = 0, \\ \varepsilon_{\epsilon,[3,3]} &= -\nu \varepsilon_{\epsilon,[1,1]}. \end{aligned}$$

Ces deux tenseurs ne dépendent pas de l'épaisseur  $2\epsilon$  de la tranche. Ils caractérisent donc la répartition de contraintes et la déformation pour la section d'abscisse  $x$ . On peut donc supprimer l'indice  $\epsilon$ . L'expression de l'énergie élastique de déformation du milieu tridimensionnel est alors :

$$W_t^* = \frac{1}{2} \int_{[0,l] \times \omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dx \, dy \, dz.$$

D'après les propriétés du repère principal d'inertie, les trois intégrales

$$\int_{\omega} z \, dy \, dz, \int_{\omega} y \, dy \, dz \text{ et } \int_{\omega} yz \, dy \, dz$$

sont nulles. On obtient donc :

$$W_t^* = \frac{1}{2} \int_{[0,l]} \left( \frac{N(x)^2}{ES} + \frac{M_3(x)^2}{EI_3} + \frac{M_2(x)^2}{EI_2} + \frac{C(x)^2}{\mu J^*} \right) dx$$

On procède alors par identification entre les énergies tridimensionnelles et curvilignes pour obtenir la loi de comportement :

$$(1.3) \quad \begin{cases} N(x) &= ES u_1'(x) \\ C(x) &= \mu J^* \theta_1'(x) \\ M_2(x) &= -EI_2 u_3''(x) \\ M_3(x) &= EI_3 u_2''(x) \end{cases}$$

**Remarque :** Si l'on néglige le gauchissement des sections droites, ou si l'on travaille avec des barres à section circulaire pour lesquelles la fonction de gauchissement est exactement nulle, on peut confondre les valeurs de  $J$  et de  $J^*$ . C'est ce que nous faisons pour la suite de cette étude.

Nous nous intéressons maintenant à l'écriture des équations d'équilibre. On montre (par ex. **Salençon** [1988.2]) que les équations traduisant l'équilibre de la poutre s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{X}'(x) + \underline{f}(x) &= 0, \\ \underline{\Gamma}'(x) + \underline{e}_1 \wedge \underline{X}(x) &= 0. \end{cases}$$

Nous pouvons éliminer les efforts de cisaillement  $V_2(x)$  et  $V_3(x)$  des équations précédentes. Les équations d'équilibre s'écrivent alors sous la forme :

$$(1.4) \quad \begin{cases} N'(x) + f_1(x) &= 0, \\ M_1'(x) &= 0, \\ M_3''(x) - f_2(x) &= 0, \\ M_2''(x) + f_3(x) &= 0, \end{cases}$$

et on doit tenir compte de la condition de compatibilité :

$$(1.5) \quad \begin{cases} M_2'(x) - V_3(x) &= 0, \\ M_3'(x) + V_2(x) &= 0. \end{cases}$$

## 1.3 Conditions aux limites et de jonction

### 1.3.1 Conditions aux limites

La première poutre de la chaîne est encastree en  $x_1 = 0$ . Nous avons donc les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \underline{u}^1(0) &\equiv 0, \\ \underline{\theta}^1(0) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ces conditions s'écrivent également sous la forme :

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \underline{u}^1(0) &\equiv 0, \\ \theta^1(0) &= 0, \\ [u_2^1]'(0) &= 0, \\ [u_3^1]'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Le champ d'efforts internes doit être compatible avec le chargement extérieur. Compte tenu de la condition (1.5), nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad N^{nt}(l_{nt}) &= \mathcal{F}_1, \\
 [M_2^{nt}]'(l_{nt}) &= \mathcal{F}_3, \\
 [M_3^{nt}]'(l_{nt}) &= -\mathcal{F}_2, \\
 \underline{\Gamma}^{nt}(l_{nt}) &\equiv \mathcal{M}.
 \end{aligned}$$

### 1.3.2 Modèle de jonction

Nous postulons la continuité des déplacements élastiques et des efforts intérieurs aux jonctions entre les poutres de la chaîne. Nous écrivons donc :

$$(1.8) \quad \forall i = 1, \dots, nt - 1 \quad \underline{u}^i(l_i) \equiv \underline{u}^{i+1}(0),$$

$$(1.9) \quad \forall i = 1, \dots, nt - 1 \quad \underline{X}^i(l_i) \equiv \underline{X}^{i+1}(0).$$

En ce qui concerne les rotations et les moments aux jonctions, nous postulons l'existence d'une suite  $\{(k_1^i, k_2^i, k_3^i)\}_{i=1, \dots, nt-1}$  de constantes strictement positives telles que :

$$\begin{aligned}
 (1.10) \quad \forall i = 1 \dots nt - 1 : \quad \underline{\Gamma}^i(l_i) &\equiv \underline{\Gamma}^{i+1}(0) \\
 &\equiv - \sum_{j=1}^3 \{k_j^i (\underline{\theta}^i(l_i) - \underline{\theta}^{i+1}(0)) \cdot \underline{e}_j^i\} \underline{e}_j^i
 \end{aligned}$$

Le coefficient  $k_j^i$  s'interprète comme la raideur caractéristique de l'articulation entre les poutres  $i$  et  $i + 1$ , dans la direction  $\underline{e}_j^i$ .

Ce modèle de jonction correspond à la généralisation, dans un contexte tridimensionnel, du modèle de *charnière élastique* (**Fayolle** [1987], **Bernadou, Fayolle, Léné** [1989]).

**Remarque :** Sous la forme ci-dessus, ce modèle de jonction correspond à la situation où l'articulation laisse trois degrés de liberté en rotation. Le modèle (1.8,1.9,1.10) correspond donc à une liaison sphérique. Nous verrons plus loin comment particulariser ce modèle pour le cas d'une liaison pivot.

## 1.4 Formulation variationnelle

### 1.4.1 Cadre fonctionnel

Nous définissons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} V_1^1 &= \{v \in H^1[0, l_1], v(0) = 0\}, \\ V_2^1 &= \{v \in H^2[0, l_1], v(0) = 0, v'(0) = 0\}, \\ V^1 &= V_1^1 \times V_1^1 \times V_2^1 \times V_2^1, \end{aligned}$$

ainsi que pour tout indice  $i > 1, i \leq nt$  :

$$\begin{aligned} V_1^i &= \{v \in H^1[0, l_i]\}, \\ V_2^i &= \{v \in H^2[0, l_i]\}, \\ V^i &= V_1^i \times V_1^i \times V_2^i \times V_2^i, \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} W_{Elastique} &= \{(\Psi, \vec{W}) = ((\psi_1^1, \underline{w}^1), \dots, (\psi_1^{nt}, \underline{w}^{nt})) \in V^1 \times \dots \times V^{nt} \text{ tel que :} \\ &\quad \forall i = 1 \dots nt - 1 : \underline{w}^i(l_i) = \underline{w}^{i+1}(0)\}. \end{aligned}$$

Nous montrons d'abord le lemme :

**Lemme 1.4.1** *L'espace  $W_{Elastique}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $V^1 \times \dots \times V^{nt}$ .*

Démonstration :

Nous définissons l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : V^1 \times \dots \times V^{nt} &\rightarrow \mathbb{R}^{nt-1} \\ (\Psi, \vec{W}) &\rightarrow [\underline{w}^i(l_i) - \underline{w}^{i+1}(0)]_{i=1, \dots, nt-1}. \end{aligned}$$

L'espace  $W_{Elastique}$  apparaît comme le noyau de  $\mathcal{G}$ . Les injections continues :

$$V_1^i \hookrightarrow C^0([0, l_i]) \text{ et } V_2^i \hookrightarrow C^1([0, l_i])$$

permettent en outre de conclure à la continuité de  $\mathcal{G}$  ce qui achève la démonstration du lemme 1.4.1.

□

L'espace  $W_{Elastique}$  est donc un espace de Hilbert.

Soit :

$$(\Theta, \vec{U}) = ((\theta_1^1, \underline{u}^1), \dots, (\theta_1^{nt}, \underline{u}^{nt})) \in W_{Elastique}$$

la solution éventuelle des équations d'équilibre de la chaîne.

Compte tenu de la loi de comportement (1.3) et des équations d'équilibre (1.4), le champ  $(\Theta, \vec{U})$  vérifie les équations :

$$(1.11) \quad \begin{cases} \mu^i J^i [\theta_1^i]'' &= 0 \\ E^i S^i [u_1^i]'' + f_1^i &= 0 \\ E^i I_3^i [u_2^i]'''' - f_2^i &= 0 \\ E^i I_2^i [u_3^i]'''' - f_3^i &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, nt \end{cases}$$

On multiplie les équations du mouvement (1.11) par une fonction  $((\phi_1^1, \underline{v}^1), \dots, (\phi_1^{nt}, \underline{v}^{nt}))$  appartenant à  $W_{Elastique}$ . En se servant de la loi de comportement (1.3) et après intégration par parties, on obtient :

$$\begin{cases} \mu^i J^i \int_0^{l_i} [\theta_1^i]' [\phi_1^i]' dx_i &= [C^i \phi_1^i]_0^{l_i}, \\ E^i S^i \int_0^{l_i} [u_1^i]' [v_1^i]' dx_i &= [N^i v_1^i]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} f_1^i v_1^i dx_i, \\ E^i I_3^i \int_0^{l_i} [u_2^i]'' [v_2^i]'' dx_i &= [M_3^i [v_2^i]']_0^{l_i} + [-[M_3^i]' v_2^i]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} f_2^i v_2^i dx_i, \\ E^i I_2^i \int_0^{l_i} [u_3^i]'' [v_3^i]'' dx_i &= -[M_2^i [v_3^i]']_0^{l_i} + [[M_2^i]' v_3^i]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} f_3^i v_3^i dx_i. \end{cases}$$

Par sommation et en se servant des conditions de raccord (1.8), (1.9) et (1.10) ainsi que de la condition (1.7), on obtient alors la formulation variationnelle :

$$(1.12) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \mu^i J^i [\theta_1^i]' [\phi_1^i]' + E^i S^i [u_1^i]' [v_1^i]' + E^i I_3^i [u_2^i]'' [v_2^i]'' + E^i I_2^i [u_3^i]'' [v_3^i]'' dx_i \\ & + \sum_{i=1}^{nt-1} \sum_{j=1}^3 k_j^i \Lambda_j^i(\Phi, \vec{V}) \Lambda_j^i(\Theta, \vec{U}) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \underline{f}^i \underline{v}^i dx_i + \mathcal{F} \cdot \underline{v}^{nt}(l_{nt}) \\ & + \mathcal{M}_1 \phi_1^{nt}(l_{nt}) - \mathcal{M}_2 [v_3^{nt}]'(l_{nt}) + \mathcal{M}_3 [v_2^{nt}]'(l_{nt}), \end{aligned}$$

où on a posé, pour tout  $(\Phi, \vec{V}) \in W_{Elastique}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda_1^i(\Phi, \vec{V}) &= [\phi_1^i(l_i) - \alpha_{1,i+1}^1 \phi_1^{i+1}(0) + \alpha_{1,i+1}^2 [v_3^{i+1}]'(0) - \alpha_{1,i+1}^3 [v_2^{i+1}]'(0)], \\ \Lambda_2^i(\Phi, \vec{V}) &= [-[v_3^i]'(l_i) - \alpha_{2,i+1}^1 \phi_1^{i+1}(0) + \alpha_{2,i+1}^2 [v_3^{i+1}]'(0) - \alpha_{2,i+1}^3 [v_2^{i+1}]'(0)], \\ \Lambda_3^i(\Phi, \vec{V}) &= [[v_2^i]'(l_i) - \alpha_{3,i+1}^1 \phi_1^{i+1}(0) + \alpha_{3,i+1}^2 [v_3^{i+1}]'(0) - \alpha_{3,i+1}^3 [v_2^{i+1}]'(0)]. \end{aligned}$$



avec :

$$(1.13) \quad \alpha_{k,i+1}^j = \underline{e}_j^{i+1} \cdot \underline{e}_k^i.$$

On note alors  $a[(\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})]$  le membre de gauche de (1.12) et  $l[(\Phi, \vec{V})]$  le membre de droite. On est alors ramené au problème :

$$(1.14) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\Theta, \vec{U}) \in W_{Elastique} \text{ tel que :} \\ \forall (\Phi, \vec{V}) \in W_{Elastique} : \quad a[(\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})] = l[(\Phi, \vec{V})] \end{array}}$$

### 1.4.2 Existence et unicité

Nous définissons une semi-norme sur  $W_{Elastique}$  par :

$$\begin{aligned} |(\Phi, \vec{V})|^2 &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ([\phi_1^i]')^2 dx_i + \int_0^{l_i} ([v_1^i]')^2 dx_i + \int_0^{l_i} ([v_2^i]'')^2 dx_i + \int_0^{l_i} ([v_3^i]'')^2 dx_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{nt-1} [\Lambda_1^i(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_2^i(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_3^i(\Phi, \vec{V})]^2 \end{aligned}$$

Nous munissons l'espace  $V^1 \times \dots \times V^{nt}$  de la norme :

$$\begin{aligned} \|(\Phi, \vec{V})\|^2 &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (\phi_1^i)^2 + ([\phi_1^i]')^2 dx_i + (v_1^i)^2 + ([v_1^i]')^2 + (v_2^i)^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_2^i]'')^2 dx_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (v_3^i)^2 + ([v_3^i]')^2 + ([v_3^i]'')^2 dx_i. \end{aligned}$$

Nous allons montrer le théorème :

**Théorème 1.4.1** *La semi-norme  $|\cdot|$  est une norme sur  $W_{Elastique}$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|$ .*

Démonstration :

Soit  $(\Phi, \vec{V}) \in W_{Elastique}$  tel que  $|(\Phi, \vec{V})| = 0$ . Par définition de  $W_{Elastique}$ , ceci entraîne :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt \quad [\phi_1^i]' &= 0, \\ [v_1^i]' &= 0, \\ [v_2^i]'' &= 0, \\ [v_3^i]'' &= 0, \end{aligned}$$

les égalités précédentes devant s'entendre au sens des distributions. Il existe donc des constantes réelles  $\{\alpha_i\}_{i=1..nt}$ ,  $\{\beta_i\}_{i=1..nt}$ ,  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1..nt}$  et  $\{(a'_i, b'_i)\}_{i=1..nt}$  telles que :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt \quad \phi_1^i &= \alpha_i, \\ v_1^i &= \beta_i, \\ v_2^i &= a_i x_i + b_i, \\ v_3^i &= a'_i x_i + b'_i. \end{aligned}$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt - 1 \quad \Lambda_1^i(\Phi, \vec{V}) &= 0, \\ \Lambda_2^i(\Phi, \vec{V}) &= 0, \\ \Lambda_3^i(\Phi, \vec{V}) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui se traduit, pour tout  $i \in \{1, \dots, nt\}$  par la relation :

$$(1.15) \quad \alpha_i \underline{e}_1^i - a'_i \underline{e}_2^i + a_i \underline{e}_3^i = \alpha_{i+1} \underline{e}_1^{i+1} - a'_{i+1} \underline{e}_2^{i+1} + a_{i+1} \underline{e}_3^{i+1}.$$

La condition de raccord (1.8) se traduit quant à elle par la relation :

$$(1.16) \quad \beta_i \underline{e}_1^i + (a_i l_i + b_i) \underline{e}_2^i + (a'_i l_i + b'_i) \underline{e}_3^i = \beta_{i+1} \underline{e}_1^{i+1} + b_{i+1} \underline{e}_2^{i+1} + b'_{i+1} \underline{e}_3^{i+1}.$$

Or, les conditions aux limites (1.6) entraînent :

$$\alpha_1 = \beta_1 = a_1 = b_1 = a'_1 = b'_1 = 0.$$

On vérifie alors que les relations (1.16) et (1.15) entraînent que toutes les constantes  $\{\alpha_i\}_{i=1..nt}$ ,  $\{\beta_i\}_{i=1..nt}$ ,  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1..nt}$  et  $\{(a'_i, b'_i)\}_{i=1..nt}$  sont nulles, ce qui entraîne la nullité de  $(\Phi, \vec{V})$  au sens des distributions, donc au sens usuel.

La semi-norme  $|\cdot|$  est donc une norme sur  $W_{Elastique}$ .

Nous montrons l'équivalence des normes en deux étapes. Nous montrons ainsi le lemme :

#### Lemme 1.4.2

$\exists K_1 > 0$  tel que :

$$\forall (\Phi, \vec{V}) \in W_{Elastique} : K_1 \|(\Phi, \vec{V})\|^2 \leq |(\Phi, \vec{V})|^2$$

Démonstration :

Pour un indice  $i \geq 2$ ,  $i \leq nt$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_i} (v_1^i)^2 + (v_2^i)^2 + (v_3^i)^2 dx_i &\leq 2 l_i^2 \int_0^{l_i} \{ ([v_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 \} dx_i \\ &\quad + 2 l_i \{ (v_1^i)^2(0) + (v_2^i)^2(0) + (v_3^i)^2(0) \}. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de raccord (1.8), on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_i} (v_1^i)^2 + (v_2^i)^2 + (v_3^i)^2 dx_i &\leq 2 l_i^2 \int_0^{l_i} \{ ([v_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 \} dx_i \\ &\quad + 4 l_i l_{i-1} \int_0^{l_{i-1}} \{ ([v_1^{i-1}]')^2 + ([v_2^{i-1}]')^2 + ([v_3^{i-1}]')^2 \} dx_{i-1} \\ &\quad + 4 l_{i-1} \{ (v_1^{i-1})^2(0) + (v_2^{i-1})^2(0) + (v_3^{i-1})^2(0) \}. \end{aligned}$$

En itérant le processus et en tenant compte des conditions aux limites (1.6), on établit finalement la majoration :

$$\begin{aligned} \|(\Phi, \vec{V})\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (\phi_1^i)^2 + ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ([v_1^i]')^2 dx_i + 2 \sum_{i=2}^{nt} l_i^2 \int_0^{l_i} \{ ([v_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 \} dx_i \\ &\quad + 2 l_i \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j} l_j \int_0^{l_j} \{ ([v_1^j]')^2 + ([v_2^j]')^2 + ([v_3^j]')^2 \} dx_j \\ &\quad + \int_0^{l_1} \{ (v_1^1)^2 + ([v_2^1]')^2 + ([v_3^1]')^2 \} dx_1. \end{aligned}$$

Puisque  $v_1^1$  vérifie l'inégalité de Poincaré, il existe une constante  $K > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \|(\Phi, \vec{V})\|^2 &\leq K \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ([v_1^i]')^2 + ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i \\ &\quad + K \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (\phi_1^i)^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i. \end{aligned}$$

On peut écrire, pour un indice  $i \geq 2$ ,  $i \leq nt$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_i} (\phi_1^i)^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i &\leq 2 l_i^2 \int_0^{l_i} \{ ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 \} dx_i \\ &\quad + 2 l_i \{ (\phi_1^i)^2(0) + ([v_2^i]')^2(0) + ([v_3^i]')^2(0) \}, \end{aligned}$$

soit en se servant de la condition de raccord (1.10) et de la relation  $\sum_{j=1}^3 (\alpha_{k,i}^j)^2 = 1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_i} (\phi_1^i)^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i &\leq 2 l_i^2 \int_0^{l_i} ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i \\ &\quad + 4 l_i \{ [\Lambda_1^{i-1}(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_2^{i-1}(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_3^{i-1}(\Phi, \vec{V})]^2 \} \\ &\quad + 4 l_i \{ (\phi_1^{i-1})^2(l_{i-1}) + ([v_3^{i-1}]')^2(l_{i-1}) + ([v_2^{i-1}]')^2(l_{i-1}) \}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

La relation (1.17) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_i} (\phi_1^i)^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i &\leq 2 l_i^2 \int_0^{l_i} ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i \\ &\quad + 4 l_i \{ [\Lambda_1^{i-1}(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_2^{i-1}(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_3^{i-1}(\Phi, \vec{V})]^2 \} \\ &\quad + (4 l_i)(2 l_{i-1}) \int_0^{l_{i-1}} ([\phi_1^{i-1}]')^2 + ([v_2^{i-1}]')^2 + ([v_3^{i-1}]')^2 dx_{i-1} \\ &\quad + 8 l_i \{ (\phi_1^{i-1})^2(0) + ([v_2^{i-1}]')^2(0) + ([v_3^{i-1}]')^2(0) \} \end{aligned}$$

En itérant le processus et en tenant compte des conditions aux limites (1.6), on établit finalement la majoration :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_i} (\phi_1^i)^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i &\leq 2 l_i^2 \int_0^{l_i} ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i \\ &\quad + 2 l_i \sum_{j=1}^{i-1} 2^{2(i-j)} l_j \int_0^{l_j} ([\phi_1^j]')^2 + ([v_2^j]')^2 + ([v_3^j]')^2 dx_j \\ &\quad + l_i \sum_{j=1}^{i-1} 2^{2(i-j)} \{ [\Lambda_1^j(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_2^j(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_3^j(\Phi, \vec{V})]^2 \}. \end{aligned}$$

Il existe alors une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \|(\Phi, \vec{V})\|^2 &\leq K \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ([v_1^i]')^2 + ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i \\ &\quad + K C \int_0^{l_1} ([\phi_1^1]')^2 + ([v_2^1]')^2 + ([v_3^1]')^2 dx_1 \\ &\quad + K \sum_{i=3}^{nt} \left[ 2 l_i^2 \int_0^{l_i} ([\phi_1^i]')^2 + ([v_2^i]')^2 + ([v_3^i]')^2 dx_i \right. \\ &\quad + 2 l_i \sum_{j=1}^{i-1} 2^{2(i-j)} l_j \int_0^{l_j} ([\phi_1^j]')^2 + ([v_2^j]')^2 + ([v_3^j]')^2 dx_j \\ &\quad \left. + l_i \sum_{j=1}^{i-1} 2^{2(i-j)} \{ [\Lambda_1^j(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_2^j(\Phi, \vec{V})]^2 + [\Lambda_3^j(\Phi, \vec{V})]^2 \} \right]. \end{aligned}$$

L'existence de cette constante provient des inégalités de Poincaré vérifiées par  $\phi_1^1, [v_2^1]'$  et  $[v_3^1]'$ .

On peut donc trouver une constante  $K_1' > 0$  telle que :

$$\|(\Phi, \vec{V})\|^2 \leq K_1' |(\Phi, \vec{V})|^2$$

et on conclut en posant :

$$K_1 = 1/K_1' \quad \square$$

Nous allons maintenant montrer le lemme :

**Lemme 1.4.3**  $\exists K_2 > 0 \quad \forall (\Phi, \vec{V}) \in W_{Elastique} : |(\Phi, \vec{V})|^2 \leq K_2 \|(\Phi, \vec{V})\|^2$

Démonstration :

Les seuls termes qui posent problème sont les termes de raccord (TR) :

$$\begin{aligned} TR &= \sum_{i=1}^{nt-1} [(\phi_1^i(l_i))^2 + (\phi_1^{i+1}(0))^2 + ([v_3^i]'(l_i))^2 + ([v_3^{i+1}]'(0))^2 + ([v_2^i]'(l_i))^2 + ([v_2^{i+1}]'(0))^2] \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{nt-1} [\phi_1^i(l_i)\phi_1^{i+1}(0)\alpha_{1,i+1}^1 + \phi_1^i(l_i)[v_3^{i+1}]'(0)\alpha_{1,i+1}^2 - \phi_1^i(l_i)[v_2^{i+1}]'(0)\alpha_{1,i+1}^3] \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{nt-1} [-[v_3^i]'(l_i)\phi_1^{i+1}(0)\alpha_{2,i+1}^1 + [v_3^i]'(l_i)[v_3^{i+1}]'(0)\alpha_{2,i+1}^2 - [v_3^i]'(l_i)[v_2^{i+1}]'(0)\alpha_{2,i+1}^3] \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{nt-1} [[v_2^i]'(l_i)\phi_1^{i+1}(0)\alpha_{3,i+1}^1 - [v_2^i]'(l_i)[v_3^{i+1}]'(0)\alpha_{3,i+1}^2 + [v_2^i]'(l_i)[v_2^{i+1}]'(0)\alpha_{3,i+1}^3] \end{aligned}$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} TR &\leq 6 \sum_{1 \leq i \leq nt-1} (\phi_1^i(l_i))^2 + (\phi_1^{i+1}(0))^2 + ([v_3^i]'(l_i))^2 + ([v_3^{i+1}]'(0))^2 \\ &\quad + ([v_2^i]'(l_i))^2 + ([v_2^{i+1}]'(0))^2. \end{aligned}$$

Les injections continues  $H^2[0, l_i] \hookrightarrow C^1[0, l_i]$  et  $H^1[0, l_i] \hookrightarrow C[0, l_i]$ , permettent alors de majorer TR par :

$$TR \leq C' \|(\Phi, \vec{V})\|^2.$$

et en posant  $K_2 = \text{Sup}(1, C')$ , on obtient le résultat annoncé.

□

Nous savons d'autre part, d'après (1.12), qu'il existe deux constantes  $\Upsilon_1 > 0$  et  $\Upsilon_2 > 0$ , dépendant des paramètres mécaniques de la chaîne, telles que :

$$\forall (\Phi, \vec{V}) \in W_{Elastique} : \Upsilon_1 |(\Phi, \vec{V})|^2 \leq a[(\Phi, \vec{V}), (\Phi, \vec{V})] \leq \Upsilon_2 |(\Phi, \vec{V})|^2.$$

La coercivité de  $a[.,.]$  sur  $W_{Elastique}$  découle alors du lemme 1.4.2, avec une constante de coercivité égale à  $\Upsilon_1 K_1$ , la continuité de  $a[.,.]$  sur  $W_{Elastique}$  découlant quant à elle du lemme 1.4.3.

Le théorème de **Lax-Milgram** est alors applicable et nous permet d'énoncer le résultat :

**Théorème 1.4.2** *Sous l'hypothèse :*

$$(f_1^i, f_2^i, f_3^i) \in (L^2[0, l_i])^3 \text{ pour tout } i = 1 \dots nt$$

*la continuité de  $l(.)$  sur  $W_{Elastique}$  est atteinte et le problème (1.14) admet une solution unique, pour tous  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$ .*

### 1.4.3 Retour sur le modèle de jonction

Nous supposons maintenant que, pour chaque indice  $i$  dans  $\{1, \dots, nt\}$ , le saut :

$$(\underline{\theta}^i(l_i) - \underline{\theta}^{i+1}(0))$$

du vecteur rotation élastique n'a de composante non nulle que suivant un axe fixe, qui est l'axe de l'articulation entre la poutre  $i$  et la poutre  $i + 1$ .

Pour un indice  $i$  donné,  $i \leq nt - 1$ , soit  $a^i$  un vecteur directeur normé de l'axe de l'articulation entre la poutre  $i$  et la poutre  $i + 1$ . On construit une base orthonormée  $(b^i, c^i)$  du plan orthogonal à  $a^i$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} b^i &= a^i \wedge \underline{e}_{j_i}^i, \\ c^i &= a^i \wedge b^i, \end{aligned}$$

avec  $j_i$  tel que

$$\|a^i \wedge \underline{e}_{j_i}^i\|_{\mathbb{R}^3} = \max_{j=1,2,3} \|a^i \wedge \underline{e}_j^i\|_{\mathbb{R}^3}.$$

On introduit les composantes  $\{b_j^i\}_{j=1,2,3}$  et  $\{c_j^i\}_{j=1,2,3}$  des vecteurs  $b^i$  et  $c^i$  dans la base  $\{e^i\}$  et on considère l'espace fonctionnel :

$$\begin{aligned} W_{Elastique}^a = \{(\Psi, \vec{W}) \in W_{Elastique} : & \sum_{j=1}^3 b_j^i \Lambda_j^i(\Psi, \vec{W}) = 0, \\ & \sum_{j=1}^3 c_j^i \Lambda_j^i(\Psi, \vec{W}) = 0, i = 1..nt - 1\}. \end{aligned}$$

Nous considérons alors le problème variationnel :

$$(1.18) \quad \boxed{\begin{aligned} & \text{Trouver } (\Theta, \vec{U}) \in W_{Elastique}^a \text{ tel que :} \\ & \forall (\Phi, \vec{V}) \in W_{Elastique}^a : a[(\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})] = l[(\Phi, \vec{V})] \end{aligned}}$$

**Théorème 1.4.3** *Sous l'hypothèse :*

$$(f_1^i, f_2^i, f_3^i) \in (L^2[0, l_i])^3 \text{ pour tout } i = 1 \cdots nt$$

le problème (1.18) admet une solution **unique**.

Démonstration :

Nous pouvons munir  $W_{Elastique}^a$  de la norme  $\| \cdot \|$ , équivalente à la norme  $\| \cdot \|$  définie sur  $\prod_{i=1}^{nt} V^i$ . La démonstration du théorème 1.4.3 sera achevée si nous montrons que  $W_{Elastique}^a$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\prod_{i=1}^{nt} V^i$ . Or, nous pouvons construire l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^a : \prod_{i=1}^{nt} V^i &\rightarrow \mathbb{R}^{5(nt-1)} \\ (\Psi, \vec{W}) &\rightarrow [\underline{w}^i(l_i) - \underline{w}^{i+1}(0), \sum_{j=1}^3 b_j^i \Lambda_j^i(\Psi, \vec{W}), \sum_{j=1}^3 c_j^i \Lambda_j^i(\Psi, \vec{W})]_{i=1, \dots, nt-1}. \end{aligned}$$

L'espace  $W_{Elastique}^a$  apparaît comme le noyau de  $\mathcal{G}^a$ . Les injections continues :

$$V_1^i \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, l_i]) \text{ et } V_2^i \hookrightarrow \mathcal{C}^1([0, l_i])$$

permettent de conclure à la continuité de  $\mathcal{G}^a$  ce qui achève la démonstration, par analogie avec la démonstration du théorème 1.4.2.

## 1.5 Approximation par éléments finis

On définit un ensemble de partitions *régulières* des  $nt$  poutres de la chaîne :

$$\bigcup_{j=1}^{M^i} [a_{j-1}^i, a_j^i] \quad i = 1, \dots, nt$$

où les points  $a_0^i$  et  $a_{M^i}^i$  ont pour abscisses respectives 0 et  $l_i$  sur la poutre  $i$ .

Pour chacune de ces partitions, on définit un espace  $U_h^i = U_{h1}^i \times U_{h1}^i \times U_{h2}^i \times U_{h2}^i$  d'éléments finis. Les espaces  $U_{h1}^i$  et  $U_{h2}^i$  sont définis de la façon suivante :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h1}^i$  appartiennent à  $P_1([a_{j-1}^i, a_j^i])$  ;
- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h1}^i$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}^i$  et  $a_j^i$  ;

$$- U_{h1}^i \subset C^0([0, l_i]);$$

et :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h2}^i$  appartiennent à  $P_3([a_{j-1}^i, a_j^i])$ ;
- Sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h2}^i$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}^i$  et  $a_j^i$  et par les valeurs de leurs dérivées premières en ces points ;
- $U_{h2}^i \subset C^1([0, l_i])$ .

On définit ensuite les espaces d'approximation par :

$$V_h^i = V_{h1}^i \times V_{h1}^i \times V_{h2}^i \times V_{h2}^i$$

tels que :

$$V_h^i \subseteq V^i, \quad V_h^i \subseteq U_h^i$$

et on introduit enfin le sous-espace  $W_{Elastique}^h$  prenant en compte les conditions de raccord :

$$W_{Elastique}^h = \{((\psi_{1h}^1, \underline{w}_h^1), \dots, (\psi_{1h}^{nt}, \underline{w}_h^{nt})) \in V_h^1 \times \dots \times V_h^{nt} \\ \forall i = 1 \dots nt - 1 : \underline{w}_h^i(l_i) = \underline{w}_h^{i+1}(0)\}$$

Soit alors le problème approché :

$$(1.19) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\Theta_h, \vec{U}_h) \in W_{Elastique}^h \text{ tel que :} \\ \forall (\Phi_h, \vec{V}_h) \in W_{Elastique}^h : a[(\Theta_h, \vec{U}_h), (\Phi_h, \vec{V}_h)] = l[(\Phi_h, \vec{V}_h)] \end{cases}$$

Nous disposons alors du théorème :

**Théorème 1.5.1** *Le problème approché (1.19) admet une solution unique dans  $W_{Elastique}^h$*

Démonstration : Le théorème résulte de la  $W_{Elastique}^h$  - ellipticité de  $a[.,.]$

□

Un résultat d'approximation conforme donné notamment dans **Fayolle** [1987], nous permet d'affirmer que le théorème suivant est vérifié :

**Théorème 1.5.2** *Si la solution  $(\Theta, \vec{U})$  du problème (1.14) appartient à l'espace :*

$$W_{Elastique} \cap \prod_{i=1}^{nt} (H^2[0, l_i])^2 \times (H^3[0, l_i])^2$$

*alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$ , telle que :*

$$\|(\Theta, \vec{U}) - (\Theta_h, \vec{U}_h)\|_{W_{Elastique}} \leq C h \|(\Theta, \vec{U})\|_{\prod_{i=1}^{nt} (H^2[0, l_i])^2 \times (H^3[0, l_i])^2}$$

*où  $(\Theta_h, \vec{U}_h)$  est la solution du problème approché (1.19).*



Dans la suite de cette section, on note  $x_1$  et  $x_2$  les abscisses respectives, sur la poutre  $i$ , des points  $a_j^i$  et  $a_{j+1}^i$  et soit  $\lambda$  la coordonnée barycentrique attachée à  $a_{j+1}^i$  sur le segment  $[a_j^i, a_{j+1}^i]$ , soit :

$$\lambda = \frac{x^i - x_1}{x_2 - x_1}.$$

On approche les fonctions  $\theta_1^i$  et  $u_1^i$  à l'aide d'éléments finis  $P_1$  - Lagrange. D'après l'expression des fonctions de base de l'élément, nous avons, pour chaque élément de poutre  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$  :

$$\begin{cases} u_{1h}^i = u_1^i(x_1)(1 - \lambda) + u_1^i(x_2)\lambda, \\ \theta_{1h}^i = \theta_1^i(x_1)(1 - \lambda) + \theta_1^i(x_2)\lambda. \end{cases}$$

On approche les fonctions  $u_2^i$  et  $u_3^i$  à l'aide d'éléments finis  $P_3$  - Hermite. Nous avons donc :

$$\begin{cases} u_{2h}^i = u_2^i(x_1)(1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda) + u_2^i(x_2)\lambda^2(3 - 2\lambda) \\ \quad + [u_2^i]'(x_1)(x_2 - x_1)\lambda(1 - \lambda)^2 - [u_2^i]'(x_2)(x_2 - x_1)\lambda^2(1 - \lambda), \\ u_{3h}^i = u_3^i(x_1)(1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda) + u_3^i(x_2)\lambda^2(3 - 2\lambda) \\ \quad + [u_3^i]'(x_1)(x_2 - x_1)\lambda(1 - \lambda)^2 - [u_3^i]'(x_2)(x_2 - x_1)\lambda^2(1 - \lambda). \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \{U_h^i\}^t &= \{\theta_{1h}^i, [\theta_{1h}^i]', u_{1h}^i, [u_{1h}^i]', u_{2h}^i, [u_{2h}^i]', [u_{2h}^i]'', u_{3h}^i, [u_{3h}^i]', [u_{3h}^i]''\}, \\ \{V_h^i\}^t &= \{\phi_{1h}^i, [\phi_{1h}^i]', v_{1h}^i, [v_{1h}^i]', v_{2h}^i, [v_{2h}^i]', [v_{2h}^i]'', v_{3h}^i, [v_{3h}^i]', [v_{3h}^i]''\}, \\ \mathcal{R}_i &= \text{Diag}[0, \mu^i J^i, 0, E^i S^i, 0, 0, E^i I_3^i, 0, 0, E^i I_2^i], \\ I[a_{j-1}^i, a_j^i] &= \int_{a_{j-1}^i}^{a_j^i} \{U_h^i\}^t \cdot [R_i] \cdot \{V_h^i\} dx^i. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire approchée  $a[(\Theta_h, \vec{U}_h), (\Phi_h, \vec{V}_h)]$  s'écrit sous la forme :

$$a[(\Theta_h, \vec{U}_h), (\Phi_h, \vec{V}_h)] = T_a(\text{libre}) + T_a(\text{raccord}),$$

avec :

$$T_a(\text{libre}) = I[a_0^1, a_1^1] + I[a_{M^{nt}-1}^{nt}, a_{M^{nt}}^{nt}] + \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=2}^{M^1-1} I[a_{j-1}^i, a_j^i]$$

et

$$\begin{aligned} T_a(\text{raccord}) &= \sum_{i=1}^{nt-1} I[a_{M^i-1}^i, a_{M^i}^i] + I[a_0^{i+1}, a_1^{i+1}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{nt-1} \sum_{j=1}^3 k_i [\Lambda_j^i(\Theta_h, \vec{U}_h) \cdot \Lambda_j^i(\Phi_h, \vec{V}_h)]. \end{aligned}$$

Posons :

$$[\mathcal{FR}_i] = \text{Diag}[0, 0, f_1^i, 0, f_2^i, 0, 0, f_3^i, 0, 0],$$

$$J[a_{j-1}^i, a_j^i] = \int_{a_{j-1}^i}^{a_j^i} [\mathcal{FR}_i] \cdot \{V_h^i\} dx^i.$$

La forme linéaire approchée  $l[(\Phi_h, \vec{V}_h)]$  s'écrit sous la forme :

$$l[(\Phi_h, \vec{V}_h)] = T_l(\text{libre}) + T_l(\text{raccord}),$$

avec :

$$T_l(\text{libre}) = \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=2}^{M^i-1} J[a_{j-1}^i, a_j^i] + J[a_0^1, a_1^1] + J[a_{M^{nt-1}}^{nt}, a_{M^{nt}}^{nt}] + \mathcal{F} \cdot [v_{1h}^{nt}(l_{nt}), v_{2h}^{nt}(l_{nt}), v_{3h}^{nt}(l_{nt})]$$

et

$$T_l(\text{raccord}) = \sum_{1 \leq i \leq nt-1} J[a_{M^i-1}^i, a_{M^i}^i] + J[a_0^{i+1}, a_1^{i+1}].$$

Ces écritures ont pour avantage de séparer les degrés de liberté mis en jeu dans les raccords avec des poutres élastiques. La rigidité et le second membre élémentaire associés à de tels degrés de liberté sont différents de ceux associés à des degrés de liberté qui ne sont pas mis en jeu dans des raccords. C'est pourquoi nous nous servons dans la suite de deux types d'éléments de poutre tridimensionnels, l'un classique de poutre en traction-compression, torsion, flexion extrait de la bibliothèque Modulef et l'autre de raccord tridimensionnel de poutres, que nous allons définir maintenant.

### Rigidité de l'élément de raccord

Nous nous intéressons au raccord entre la poutre  $i$  et la poutre  $i+1$ ,  $i \in \{1, \dots, nt-1\}$ . Nous définissons un élément de raccord à trois nœuds dont les degrés de liberté sont les suivants :

- $u_1^i(a_{M^i-1}^i), u_2^i(a_{M^i-1}^i), u_3^i(a_{M^i-1}^i), \theta_1^i(a_{M^i-1}^i), [u_2^i]'(a_{M^i-1}^i)$  et  $[u_3^i]'(a_{M^i-1}^i)$  en  $a_{M^i-1}^i$ .
- $u_1^i(a_{M^i}^i), u_1^{i+1}(a_{M^i}^i), u_2^i(a_{M^i}^i), u_2^{i+1}(a_{M^i}^i), u_3^i(a_{M^i}^i), u_3^{i+1}(a_{M^i}^i), \theta_1^i(a_{M^i}^i), \theta_1^{i+1}(a_{M^i}^i), [u_2^i]'(a_{M^i}^i), [u_2^{i+1}]'(a_{M^i}^i), [u_3^i]'(a_{M^i}^i)$  et  $[u_3^{i+1}]'(a_{M^i}^i)$  en  $a_{M^i}^i$ .
- $u_1^{i+1}(a_1^{i+1}), u_2^{i+1}(a_1^{i+1}), u_3^{i+1}(a_1^{i+1}), \theta_1^{i+1}(a_1^{i+1}), [u_2^{i+1}]'(a_1^{i+1})$  et  $[u_3^{i+1}]'(a_1^{i+1})$  en  $a_1^{i+1}$ .

Pour construire la matrice de rigidité de l'élément, nous devons d'abord calculer la matrice de rigidité élémentaire des deux éléments de poutre qui composent l'élément de raccord. On effectue le calcul pour l'élément  $[a_{M^i-1}^i, a_{M^i}^i]$  par exemple. On obtient, tous calculs faits :

$$(1.20) \quad I[a_{M^i-1}^i, a_{M^i}^i] = \{dl_{M^i} U_h^i\}^t \cdot [R_i^e] \cdot \{dl_{M^i} V_h^i\}$$

avec :

$$\begin{aligned} \{dl_{M^i} U_h^i\} &= [u_1^i(a_{M^i-1}^i), u_1^i(a_{M^i}^i), \theta_1^i(a_{M^i-1}^i), \theta_1^i(a_{M^i}^i), u_2^i(a_{M^i-1}^i), u_2^i(a_{M^i}^i), \\ &\quad [u_2^i]'(a_{M^i-1}^i), [u_2^i]'(a_{M^i}^i), u_3^i(a_{M^i-1}^i), u_3^i(a_{M^i}^i), [u_3^i]'(a_{M^i-1}^i), [u_3^i]'(a_{M^i}^i)] \\ \{dl_{M^i} V_h^i\} &= [v_1^i(a_{M^i-1}^i), v_1^i(a_{M^i}^i), \phi_1^i(a_{M^i-1}^i), \phi_1^i(a_{M^i}^i), v_2^i(a_{M^i-1}^i), v_2^i(a_{M^i}^i), \\ &\quad [v_2^i]'(a_{M^i-1}^i), [v_2^i]'(a_{M^i}^i), v_3^i(a_{M^i-1}^i), v_3^i(a_{M^i}^i), [v_3^i]'(a_{M^i-1}^i), [v_3^i]'(a_{M^i}^i)] \end{aligned}$$

et où :

$$[R_i^e] = \begin{bmatrix} B_{[1,1]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{[2,2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{[3,3]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{[4,4]} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} B_{[1,1]} &= \begin{bmatrix} \frac{E^i S^i}{l_i} & -\frac{E^i S^i}{l_i} \\ * & \frac{E^i S^i}{l_i} \end{bmatrix} \\ B_{[2,2]} &= \begin{bmatrix} \frac{\mu^i J^i}{l_i} & -\frac{\mu^i J^i}{l_i} \\ * & \frac{\mu^i J^i}{l_i} \end{bmatrix} \\ B_{[3,3]} &= \begin{bmatrix} 12 \frac{E^i I_3^i}{l_i^3} & -12 \frac{E^i I_3^i}{l_i^3} & 6 \frac{E^i I_3^i}{l_i^2} & 6 \frac{E^i I_3^i}{l_i^2} \\ & 12 \frac{E^i I_3^i}{l_i^3} & -6 \frac{E^i I_3^i}{l_i^2} & -6 \frac{E^i I_3^i}{l_i^2} \\ & & 4 \frac{E^i I_3^i}{l_i} & 2 \frac{E^i I_3^i}{l_i} \\ * & & & 4 \frac{E^i I_3^i}{l_i} \end{bmatrix} \\ B_{[4,4]} &= \begin{bmatrix} 12 \frac{E^i I_2^i}{l_i^3} & -12 \frac{E^i I_2^i}{l_i^3} & 6 \frac{E^i I_2^i}{l_i^2} & 6 \frac{E^i I_2^i}{l_i^2} \\ & 12 \frac{E^i I_2^i}{l_i^3} & -6 \frac{E^i I_2^i}{l_i^2} & -6 \frac{E^i I_2^i}{l_i^2} \\ & & 4 \frac{E^i I_2^i}{l_i} & 2 \frac{E^i I_2^i}{l_i} \\ * & & & 4 \frac{E^i I_2^i}{l_i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

( $l_i$  est ici la longueur du segment  $[a_{M^{i-1}}^i, a_{M^i}^i]$ ,  $l_{i+1}$  est la longueur du segment  $[a_{M^i}^i, a_{M^{i+1}}^i]$ ). Nous posons :

$$[R^e] = \begin{bmatrix} [R_i^e] & 0 \\ 0 & [R_{i+1}^e] \end{bmatrix}$$

Nous devons ensuite des termes de couplage entre les rotations élastiques des poutres du raccord. On considère la matrice  $[K]$  de taille 24x24 constituée comme suit :

- $K(4, 4) = K(8, 8) = K(12, 12) = K(15, 15) = K(19, 19) = k_i$
- $K(23, 23) = k_i$
- $K(4, 15) = K(15, 4) = -k_1^i \alpha_{1,i+1}^1$
- $K(4, 19) = K(19, 4) = -k_1^i \alpha_{1,i+1}^3$
- $K(4, 23) = K(23, 4) = k_1^i \alpha_{1,i+1}^2$
- $K(8, 15) = K(15, 8) = -k_3^i \alpha_{3,i+1}^1$
- $K(8, 19) = K(19, 8) = -k_3^i \alpha_{3,i+1}^3$
- $K(8, 23) = K(23, 8) = k_3^i \alpha_{3,i+1}^2$
- $K(12, 15) = K(15, 12) = k_2^i \alpha_{2,i+1}^1$
- $K(12, 19) = K(19, 12) = k_2^i \alpha_{2,i+1}^3$
- $K(12, 23) = K(23, 12) = -k_2^i \alpha_{2,i+1}^2$
- autres  $K(i, j)$  nuls.

La rigidité élémentaire du raccord vaut :

$$[R] = [R^e] + [K]$$

### Second membre du raccord

On calcule le second membre élémentaire des deux éléments de poutre qui composent l'élément de raccord. Pour l'élément  $[a_{M^{i-1}}^i, a_{M^i}^i]$ , en supposant que les efforts répartis sont des constantes, on obtient, tous calculs faits :

$$(1.21) \quad J[a_{M^{i-1}}^i, a_{M^i}^i] = [F_i] \cdot \{dl_{M^i}, V_h^i\}$$

en posant :

$$[F_i] = [f_1^i \frac{l_i}{2}, f_1^i \frac{l_i}{2}, 0, 0, f_2^i \frac{l_i}{2}, f_2^i \frac{l_i}{2}, f_2^i \frac{l_i^2}{12}, -f_2^i \frac{l_i^2}{12}, f_3^i \frac{l_i}{2}, f_3^i \frac{l_i}{2}, f_3^i \frac{l_i^2}{12}, -f_3^i \frac{l_i^2}{12}].$$

Le second membre élémentaire du raccord est :

$$[F] = [[F_i], [F_{i+1}]]$$

Ajoutons enfin que les conditions de raccord

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 b^i \cdot \Lambda_j^i(\Psi_h, \vec{W}_h) &= 0 \\ \sum_{j=1}^3 c^i \cdot \Lambda_j^i(\Psi_h, \vec{W}_h) &= 0 \end{aligned}$$

définies à la section (1.4.3) ainsi que les conditions de raccord (1.8) sur les déplacements sont prises en compte en tant que conditions aux limites en relation linéaire par le logiciel Modulef, dans lequel notre élément de raccord s'insère.

## 1.6 Tests numériques

Sauf pour le dernier cas de cette section, les poutres étudiées, de sections carrées, possèdent les caractéristiques mécaniques *communes* suivantes :

Module d'Young :  $E = 200\,000 \text{ MPa}$

Module de cisaillement :  $\mu = 150\,000 \text{ MPa}$

Section :  $S = 0.0001 \text{ m}^2$

Inerties :  $I_2 = I_3 = \frac{1}{12} 10^{-8} \text{ m}^4$  ;  $J = I_2 + I_3$

Nous validons notre élément de raccord sur trois exemples de structures à deux poutres chargées dans leur plan et nous présentons ensuite trois exemples de structures (à deux et trois poutres) sous un chargement général.

Dans la suite de cette section, les déformées sont représentées en traits continus et les maillages en traits pointillés.

### 1.6.1 Structures chargées dans leur plan

Nous considérons une structure à deux poutres, contenue dans le plan  $(O, \underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$ . Les paramètres géométriques de cette structure (cf. **Fayolle** [1987]) sont les suivants :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{4} \\ &= -\theta_2 \\ l_1 &= 2\sqrt{2}m \\ l_2 &= \sqrt{2}m \end{aligned}$$

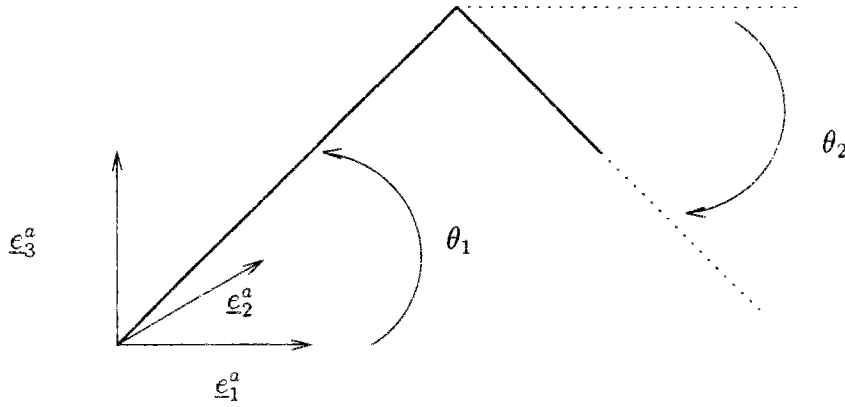


FIG. 1.3 - Structure à deux poutres

Les champs de déplacement dans le repère absolu, notés avec un exposant  $G$  sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned}
 (u_1^i)^G &= \cos(\theta_i) u_1^i - \sin(\theta_i) u_2^i, \\
 (u_2^i)^G &= -u_3^i, \\
 (u_3^i)^G &= \sin(\theta_i) u_1^i + \cos(\theta_i) u_2^i, \\
 (\theta_1^i)^G &= \cos(\theta_i) \theta_1^i + \sin(\theta_i) [u_3^i]', \\
 ([u_3^i]')^G &= [u_2^i]', \\
 ([u_2^i]')^G &= \sin(\theta_i) \theta_1^i - \cos(\theta_i) [u_3^i]'.
 \end{aligned}$$

Nous avons de plus les conditions de raccord des efforts à l'articulation :

$$\begin{aligned}
 EI_2 [u_3^1]'''(l_1) &= EI_2 [u_3^2]'''(0), \\
 ES [u_1^1]'(l_1) &= -EI_3 [u_2^2]'''(0), \\
 EI_3 [u_2^1]'''(l_1) &= ES [u_1^2]'(0),
 \end{aligned}$$

ainsi que les conditions de raccord des moments :

$$\begin{aligned}
 EI_3 [u_2^1]''(l_1) &= EI_3 [u_2^2]''(0), \\
 \mu J [\theta_1^1]'(l_1) &= -EI_2 [u_3^2]''(0), \\
 -EI_2 [u_3^1]''(l_1) &= \mu J [\theta_1^2]'(0).
 \end{aligned}$$

Enfin les tests sont effectués avec un maillage analogue à celui de **Fayolle** [1987], soit 15 éléments tridimensionnels de poutres pour la poutre 1, 7 pour la poutre 2 et un élément de raccord.

### • Charnière “rigide”

Il s’agit d’un cas particulier simple du modèle de jonction : on considère que la jonction transmet intégralement les déplacements et les rotations élastiques. Le moment articulaire n’est toutefois pas nul, ce qui impose  $k_j^1 \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Les caractéristiques du test sont les suivantes :

#### Chargement

$$f_2^1 = -\sqrt{2} N/m,$$

$$f_2^2 = -\sqrt{2} N/m.$$

Les autres composantes des efforts répartis sont nulles et il n’y a pas d’effort, ni de moment ponctuel en bout de structure.

#### Conditions de raccord

$$(u_1^1)^G(l_1) = (u_1^2)^G(0)$$

$$(u_2^1)^G(l_1) = (u_2^2)^G(0)$$

$$(u_3^1)^G(l_1) = (u_3^2)^G(0)$$

$$(\theta_1^1)^G(l_1) = (\theta_1^2)^G(0)$$

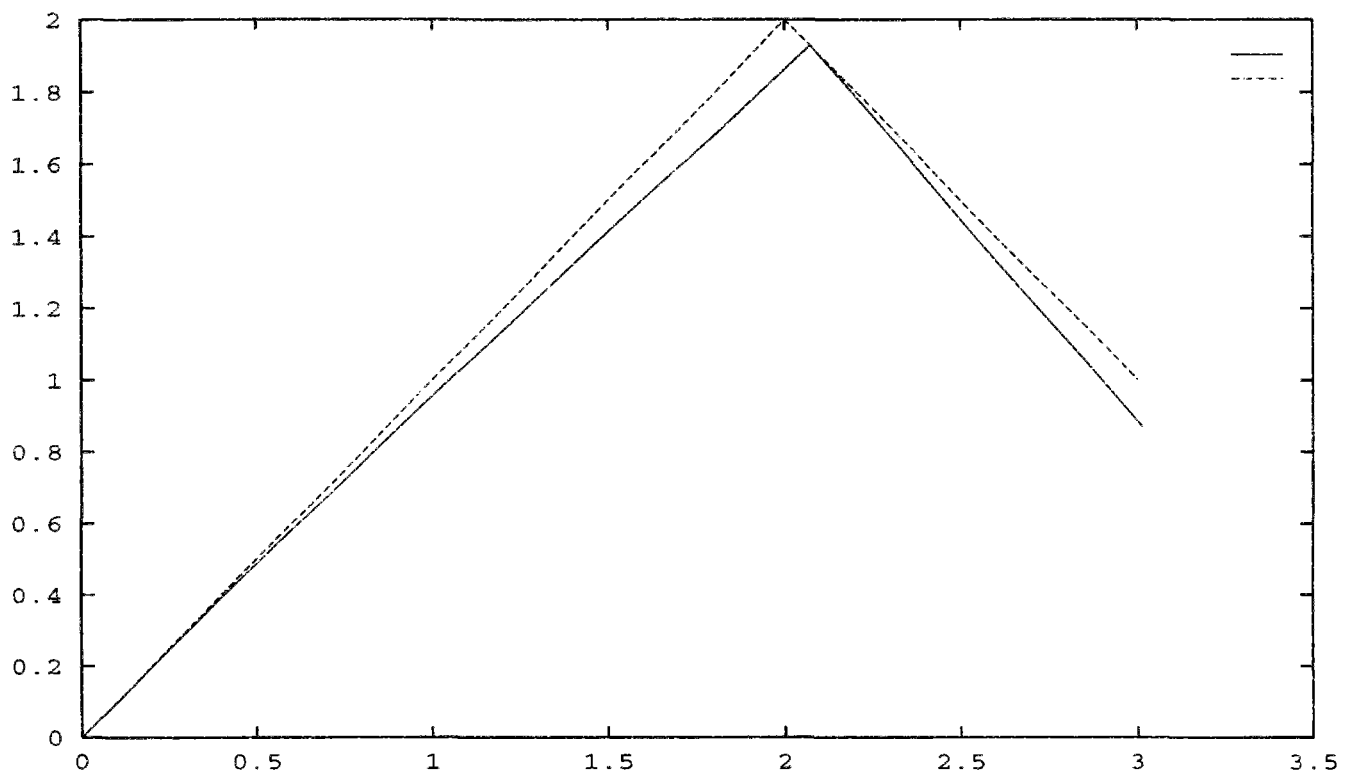
$$([u_3^1]')^G(l_1) = ([u_3^2]')^G(0)$$

$$([u_2^1]')^G(l_1) = ([u_2^2]')^G(0)$$

#### Résultats

Nous comparons notre solution éléments finis avec celle de **Fayolle** [1987] ainsi qu’avec la solution analytique :

$$\begin{cases} (u_1^2)(x_2) = \frac{12\sqrt{2}}{EI_3}, \\ (u_2^2)(x_2) = -\frac{4\sqrt{2}}{ES} - \frac{1}{24EI_3} x_2 (\sqrt{2}x_2^3 - 8x_2^2 + 12\sqrt{2}x_2 + 224). \end{cases}$$

FIG. 1.4 - *Maillage initial et déformée : Cas rigide*

	$(u_1^2)^G(l_2)$	$(u_3^2)^G(l_2)$
Analytique	12,9998 mm	-131,0002 mm
<b>Fayolle</b> [1987]	13,0003 mm	-131,005 mm
Éléments finis	12,99979664 mm	-131,000197 mm



### • Charnière “élastique” - Premier cas

On considère que le saut de la rotation élastique a lieu suivant l’axe dirigé par le vecteur  $\underline{e}_3^1$ . Nous prenons  $k_3^1 = 10 N.m$  ainsi que  $k_j^1 \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, 2$ . Les caractéristiques du test sont les suivantes :

#### Chargement

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} N,$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} N,$$

$$\mathcal{F}_3 = 0.$$

Les efforts répartis et le moment en bout de structure sont nuls.

#### Conditions de raccord

$$(u_1^1)^G(l_1) = (u_1^2)^G(0)$$

$$(u_2^1)^G(l_1) = (u_2^2)^G(0)$$

$$(u_3^1)^G(l_1) = (u_3^2)^G(0)$$

$$(\theta_1^1)^G(l_1) = (\theta_1^2)^G(0)$$

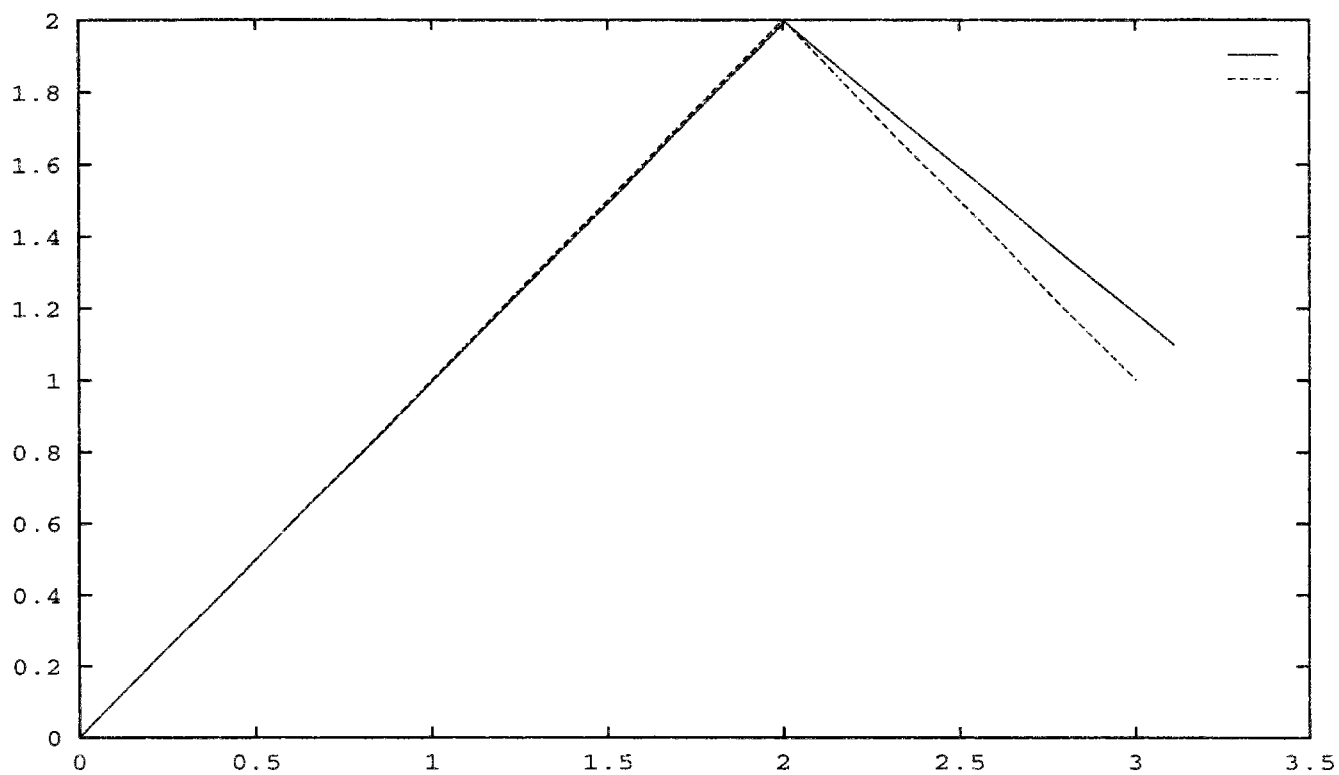
$$([u_2^1]')^G(l_1) = ([u_2^2]')^G(0)$$

$$EI_3[u_2^1]''(l_1) = -k_3^1 ([u_2^1]'(l_1) - [u_2^2]'(0))$$

#### Résultats

Nous comparons notre solution éléments finis avec celle de **Fayolle** [1987] ainsi qu’avec la solution analytique :

$$\begin{cases} (u_1^2)(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2 EI_3} x_2 + \frac{4}{3 EI_3}, \\ (u_2^2)(x_2) = \frac{1}{12 EI_3} x_2^2 (-\sqrt{2} x_2 + 6) + \frac{1}{k_3^1} x_2 + \frac{2}{ES}. \end{cases}$$

FIG. 1.5 - *Maillage initial et déformée : Cas élastique 1*

	$(u_1^2)^G(l_2)$	$(u_3^2)^G(l_2)$
Analytique	108,4854 mm	97,1716 mm
<b>Fayolle</b> [1987]	108,486 mm	97,1715 mm
Éléments finis	108,48539 mm	97,17161 mm

### • Charnière “élastique” - Deuxième cas

Les conditions de raccord sont identiques au cas précédent. Les nouvelles caractéristiques du test sont les suivantes :

#### Chargement

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= 0, \\ \mathcal{M}_2 &= 0, \\ \mathcal{M}_3 &= 1 \text{ N.m.}\end{aligned}$$

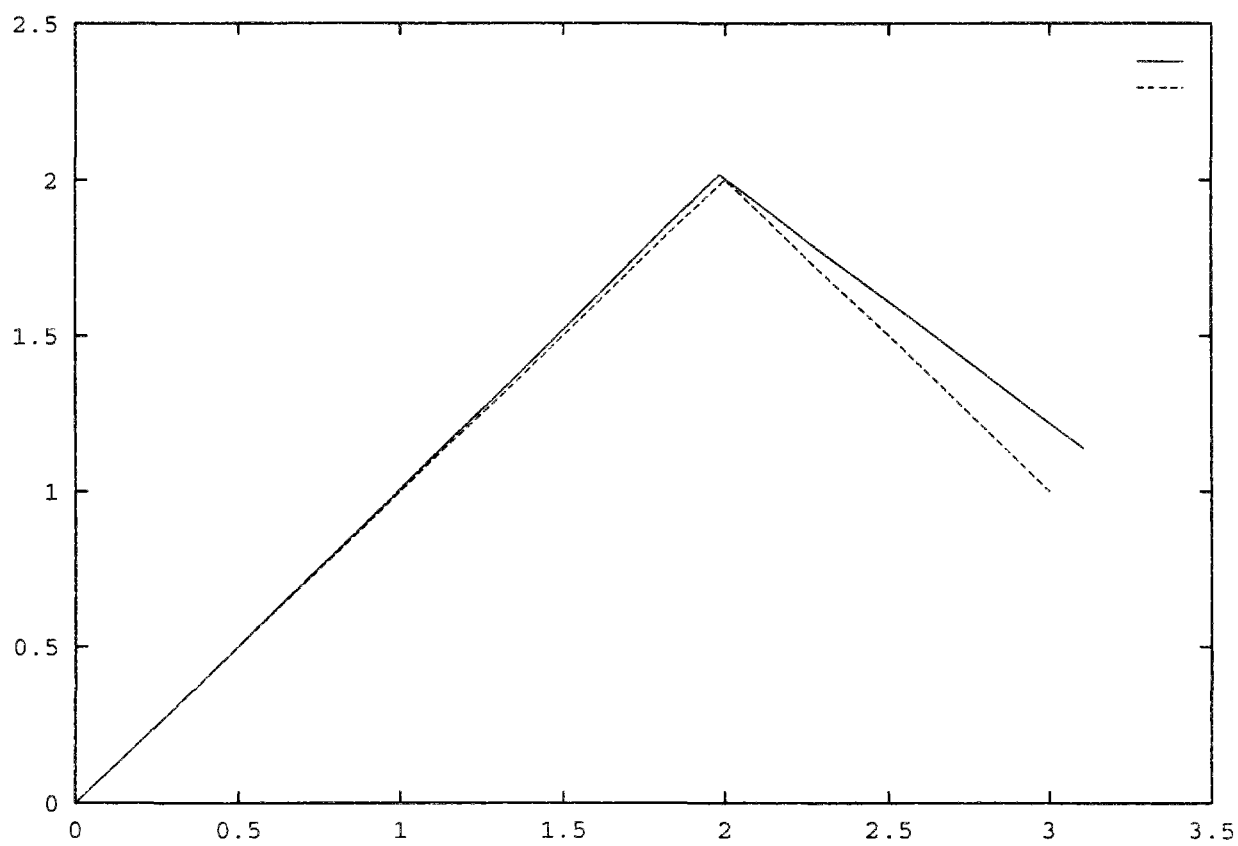
Les efforts répartis et l'effort en bout de structure sont nuls.

#### Résultats

Nous comparons notre solution éléments finis avec celle de **Fayolle** [1987] ainsi qu'avec la solution analytique :

$$\begin{cases} (u_1^2)(x_2) = -\frac{4}{EI_3}, \\ (u_2^2)(x_2) = \frac{1}{2EI_3}x_2(x_2 + 4\sqrt{2}) + \frac{1}{k_3^1}x_2. \end{cases}$$

	$(u_1^2)^G(l_2)$	$(u_3^2)^G(l_2)$
Analytique	104,2426 mm	138,1838 mm
<b>Fayolle</b> [1987]	104,243 mm	138,185 mm
Éléments finis	104,24265 mm	138,18376 mm

FIG. 1.6 - *Maillage initial et déformée : Cas élastique 2*

## 1.6.2 Structures sous chargement général

### Structures à deux poutres

#### • Charnière “élastique” - Cas avec torsion et effort ponctuel

Nous considérons la structure à deux poutres de la figure (1.3), et nous conservons le maillage défini à la section (1.6.1).

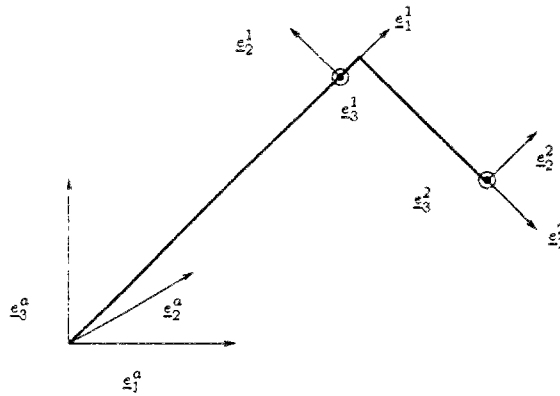


FIG. 1.7 - Repère absolu et repères locaux

On considère que le saut de la rotation élastique a lieu suivant l'axe dirigé par le vecteur  $\underline{e}_1^1$ . Nous prenons  $k_1^1 = 10 \text{ N.m}$  ainsi que  $k_j^1 \rightarrow \infty$ ,  $j = 2, 3$ . Les caractéristiques du test sont les suivantes :

#### Chargement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= 0, \\ \mathcal{F}_2 &= 0, \\ \mathcal{F}_3 &= -1 \text{ N}.\end{aligned}$$

Les efforts répartis et le moment en bout de structure sont nuls.

### Conditions de raccord

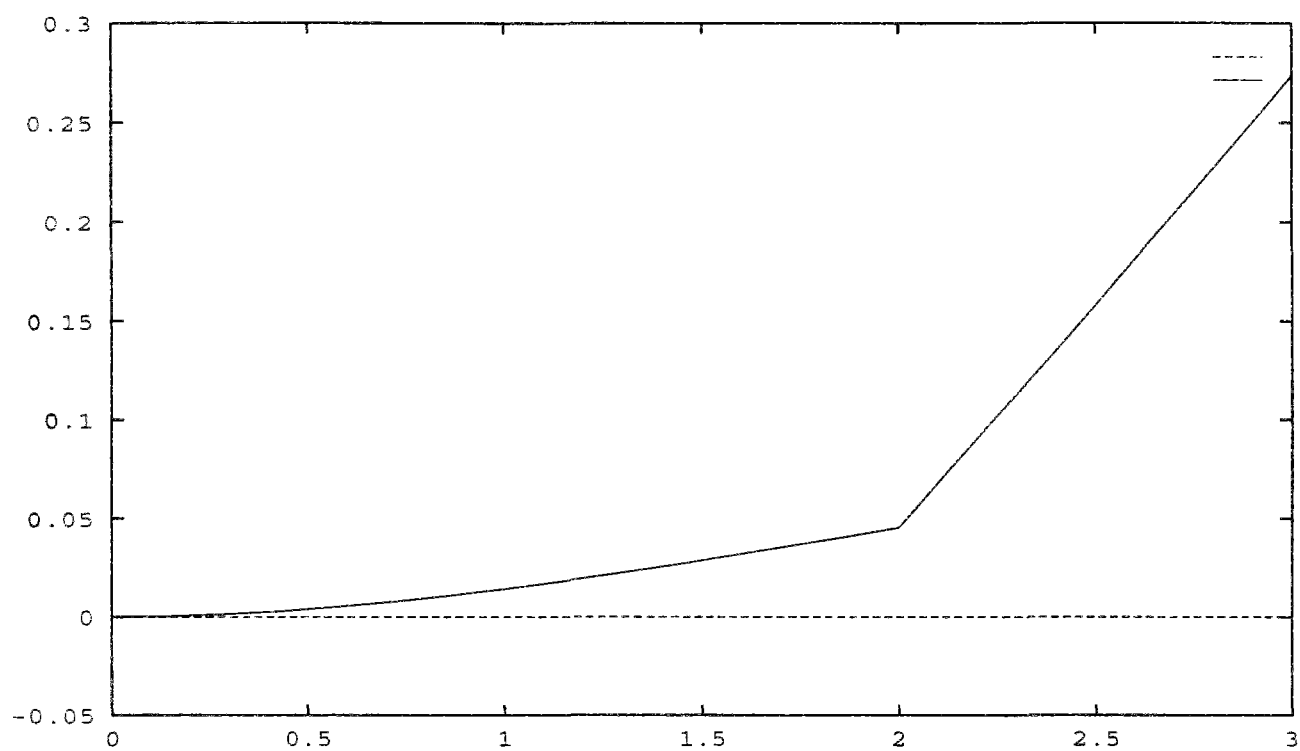
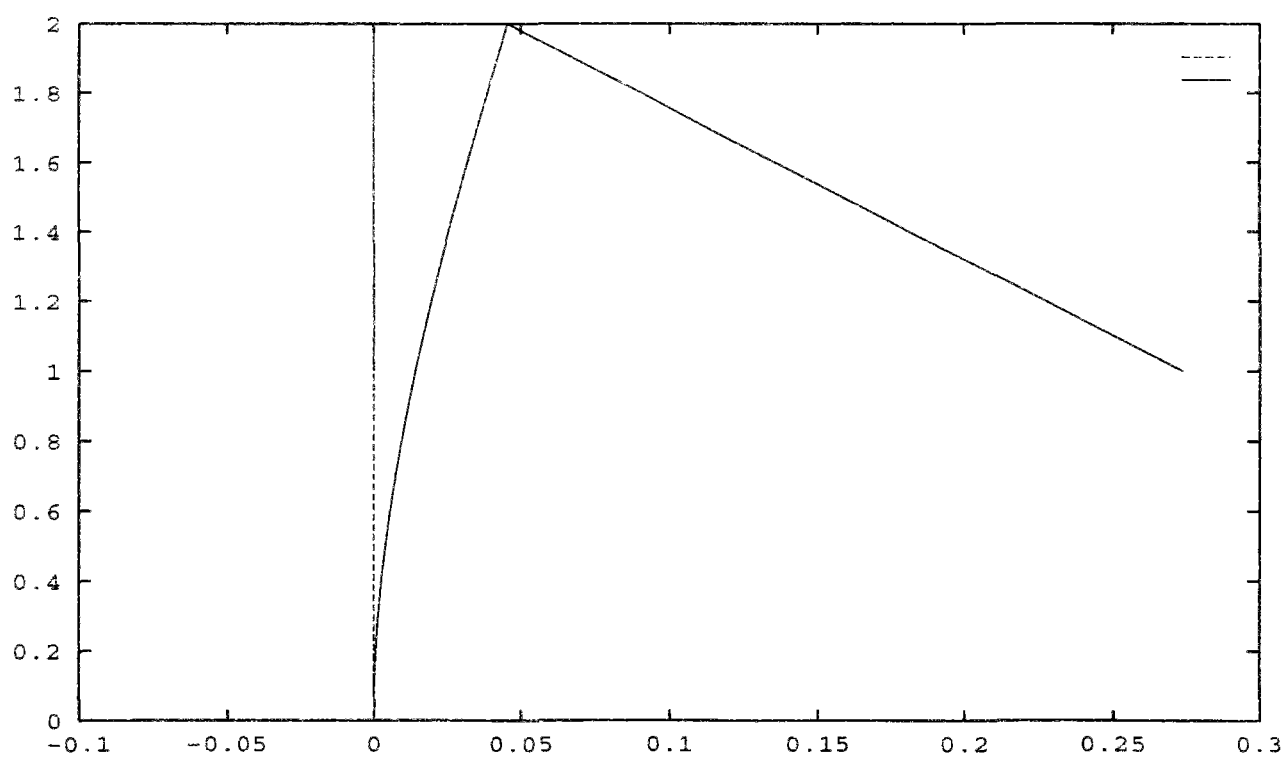
$$\begin{aligned}
(u_1^1)(l_1)^G &= (u_1^2)^G(0) \\
(u_2^1)(l_1)^G &= (u_2^2)^G(0) \\
(u_3^1)(l_1)^G &= (u_3^2)^G(0) \\
([u_3^1]')(l_1) &= (\theta_1^2)(0) \\
([u_2^1]')(l_1) &= ([u_2^2]')(0) \\
\mu J[\theta_1^1]'(l_1) &= -k_1^1 (\theta_1^1(l_1) + ([u_3^2]')(0))
\end{aligned}$$

### Résultats

Nous comparons notre solution éléments finis avec la solution analytique :

$$\begin{aligned}
\theta_1^1(x_1) &= -\frac{\mathcal{F}_3 l_2}{\mu J} x_1, \\
u_1^1(x_1) &= 0, \\
u_2^1(x_1) &= 0, \\
u_3^1(x_1) &= \frac{\mathcal{F}_3 l_1}{2EI_2} x_1^2 - \frac{\mathcal{F}_3}{6EI_2} x_1^3, \\
\theta_1^2(x_2) &= \frac{\mathcal{F}_3 l_1^2}{2EI_2}, \\
u_1^2(x_2) &= 0, \\
u_2^2(x_2) &= 0, \\
u_3^1(x_1) &= \frac{\mathcal{F}_3 l_1^3}{3EI_2} + x_2 \left\{ \mathcal{F}_3 l_2 \left( \frac{1}{k_1^1} + \frac{l_1}{\mu J} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\mathcal{F}_3 l_2}{2EI_2} x_2^2 - \frac{\mathcal{F}_3}{6EI_2} x_2^3.
\end{aligned}$$

	$(u_2^2)^G(l_2)$	$(\theta_1^2)^G(l_2)$
Analytique	273.5391 mm	0.098585786
Éléments finis	273.53908 mm	0.09858579

FIG. 1.8 - *Maillage initial et déformée : Plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$* FIG. 1.9 - *Maillage initial et déformée : Plan  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$*

• Charnière “élastique” - Cas avec torsion, moment ponctuel et effort réparti

Nous considérons la structure à deux poutres définie à la section précédente.

Nous faisons encore l’hypothèse que le saut de la rotation élastique a lieu suivant l’axe dirigé par le vecteur  $\underline{e}_1^1$ . Nous prenons  $k_1^1 = 10 \text{ N.m}$  ainsi que  $k_j^1 \rightarrow \infty$ ,  $j = 2, 3$ . Les caractéristiques du test sont les suivantes :

**Chargement**

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\equiv 0, \\ \mathcal{M}_1 &= 0, \\ \mathcal{M}_2 &= 1 \text{ N.m}, \\ \mathcal{M}_3 &= 0, \\ f_1^1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ N/m}, \\ f_2^1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ N/m}, \\ f_3^1 &= 0.\end{aligned}$$

**Conditions de raccord**

$$\begin{aligned}(u_1^1)(l_1)^G &= (u_1^2)^G(0) \\ (u_2^1)(l_1)^G &= (u_2^2)^G(0) \\ (u_3^1)(l_1)^G &= (u_3^2)^G(0) \\ ([u_3^1]')(l_1) &= (\theta_1^2)(0) \\ ([u_2^1]')(l_1) &= ([u_2^2]')(0) \\ \mu J[\theta_1^1]'(l_1) &= -k_1^1 (\theta_1^1(l_1) + ([u_3^2]')(0))\end{aligned}$$

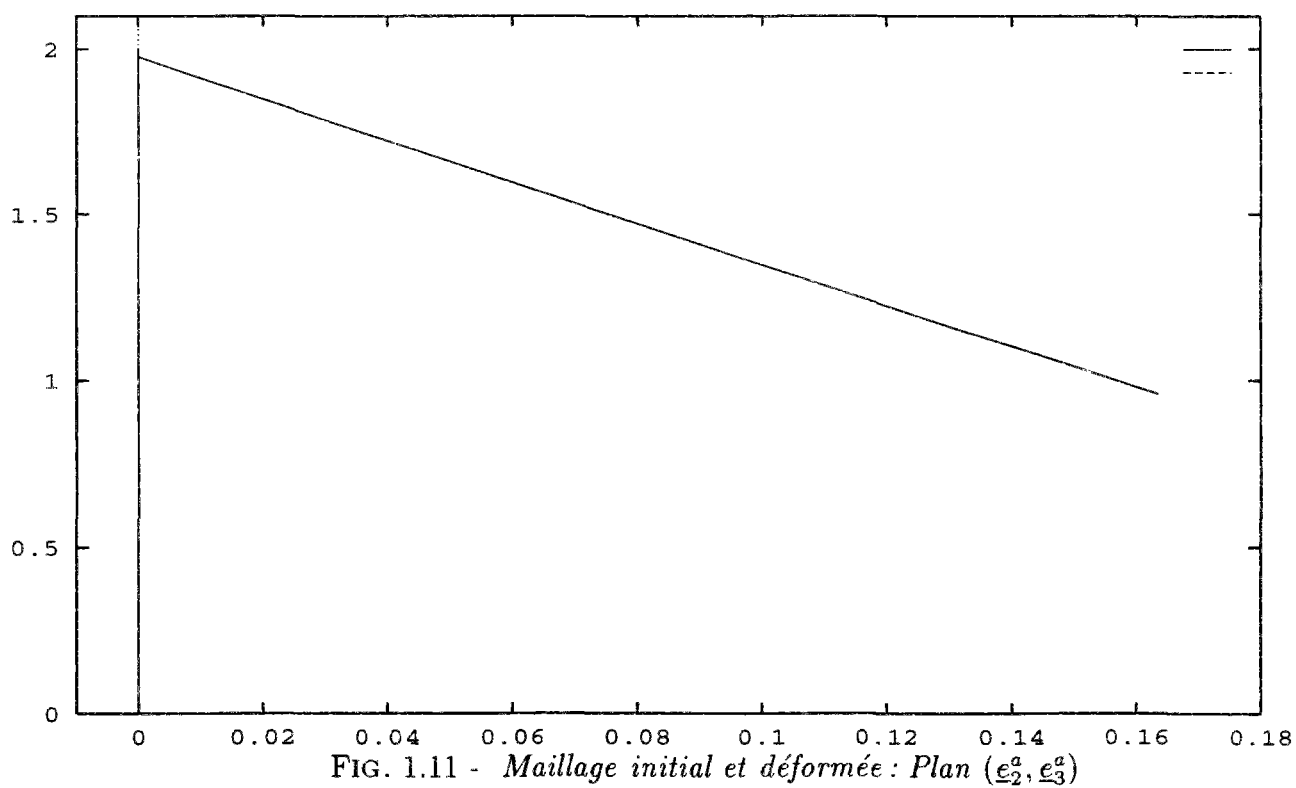
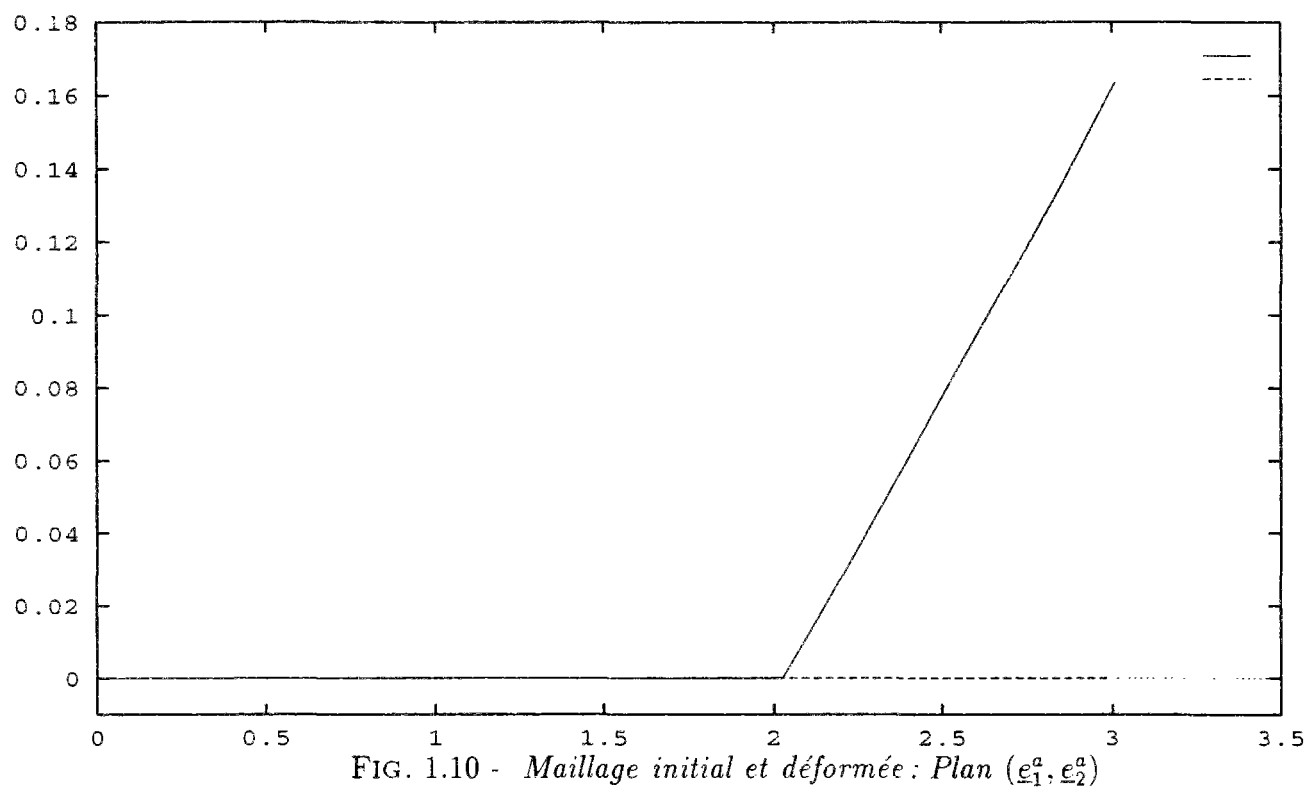


### Résultats

Nous comparons notre solution éléments finis avec la solution analytique :

$$\begin{aligned}
 \theta_1^1(x_1) &= \frac{\mathcal{M}_2}{\mu J} x_1, \\
 u_1^1(x_1) &= \frac{f_1^1 l_1}{ES} x_1 - \frac{f_1^1}{2ES} x_1^2, \\
 u_2^1(x_1) &= \frac{f_2^1 l_1^2}{4EI_3} - \frac{f_2^1 l_1}{6EI_3} x_1^3 + \frac{f_2^1}{24EI_3} x_1^4, \\
 u_3^1(x_1) &= 0, \\
 \theta_1^2(x_2) &= 0, \\
 u_1^2(x_2) &= -\frac{f_2^1 l_1^4}{8EI_3}, \\
 u_2^2(x_2) &= \frac{f_1^1 l_1^2}{2ES} + \frac{f_2^1 l_1^3}{6EI_3} x_2, \\
 u_3^1(x_1) &= -x_2 \left\{ \mathcal{M}_2 \left( \frac{1}{k_1^1} + \frac{l_1}{\mu J} \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{\mathcal{M}_2}{2EI_2} x_2^2.
 \end{aligned}$$

	$(u_1^2)^G(l_2)$	$(u_2^2)^G(l_2)$	$(u_3^2)^G(l_2)$
Analytique	8 mm	163.42136 mm	-40 mm
Éléments finis	7.99 mm	163.42135 mm	-40 mm



## Structure à trois poutres

Nous considérons la structure à trois poutres suivante :

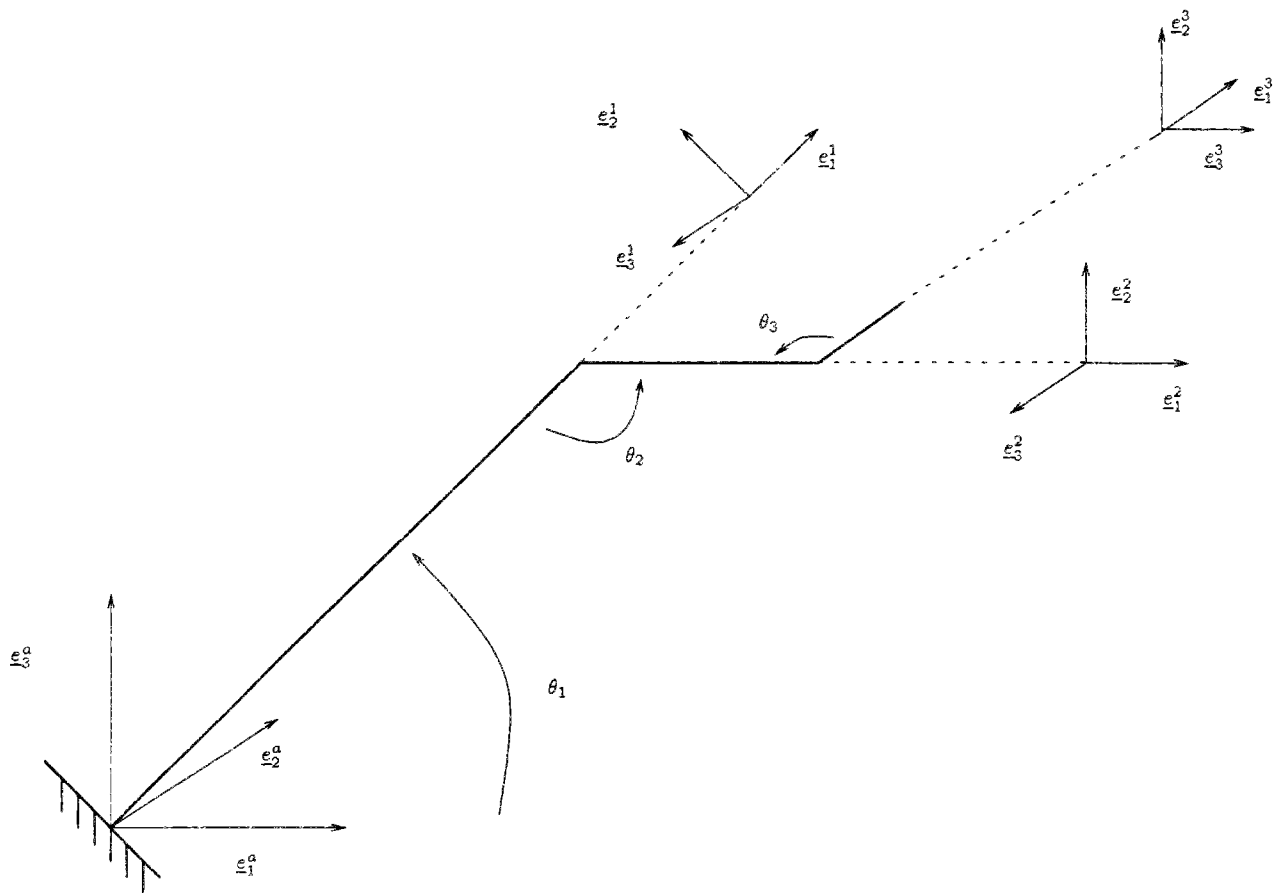


FIG. 1.12 - Repère absolu et repères locaux

Les trois poutres de la chaîne sont de sections carrées. Les poutres d'indices 1 et 3 possèdent les caractéristiques mécaniques suivantes :

Module d'Young :  $E^1 = E^3 = 200\,000 \text{ MPa}$

Module de cisaillement :  $\mu^1 = \mu^3 = 150\,000 \text{ MPa}$

Section :  $S^1 = S^3 = 0.0001 \text{ m}^2$

Inerties :  $I_2^1 = I_3^1 = I_2^3 = I_3^3 = \frac{1}{12} 10^{-8} \text{ m}^4$  ;  $J^1 = J^3 = I_2^1 + I_3^1$ .

La poutre d'indice 2 possède quant à elle les caractéristiques mécaniques :

$$\text{Module d'Young :} \quad E^2 = 2 \times 10^{14} \text{ MPa}$$

$$\text{Module de cisaillement :} \quad \mu^2 = 1.5 \times 10^{14} \text{ MPa}$$

$$\text{Section :} \quad S^2 = 0.0001 \text{ m}^2$$

$$\text{Inerties :} \quad I_2^2 = I_3^2 = \frac{1}{12} 10^{-8} \text{ m}^4.$$

Les paramètres géométriques de la structure sont les suivants :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{4}, & \theta_2 &= \frac{3\pi}{4}, & \theta_3 &= \frac{\pi}{2} \\ l_1 &= 2\sqrt{2} \text{ m} & l_2 &= 1 \text{ m} & l_3 &= 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

Les champs de déplacement dans le repère absolu sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} (u_1^2)^G &= u_1^2, \\ (u_2^2)^G &= -u_3^2, \\ (u_1^1)^G &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1^1 - u_2^1), & (u_3^2)^G &= u_2^2, \\ (u_2^1)^G &= -u_3^1, & (\theta_1^2)^G &= \theta_1^2, \\ (u_3^1)^G &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1^1 + u_2^1), & ([u_3^2]')^G &= [u_2^2]', \\ (\theta_1^1)^G &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\theta_1^1 + [u_3^1]'), & (u_1^3)^G &= u_3^3, \\ ([u_3^1]')^G &= [u_2^1]', & (u_2^3)^G &= u_1^3, \\ ([u_2^1]')^G &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\theta_1^1 - [u_3^1]'), & (u_3^3)^G &= u_2^3, \\ & & (\theta_1^3)^G &= [u_2^3]', \\ & & ([u_3^3]')^G &= -\theta_1^3, \\ & & ([u_2^3]')^G &= -[u_3^3]'. \end{aligned}$$

Les conditions de raccord des efforts aux articulations s'écrivent :

$$\begin{aligned} E^1 S^1 [u_1^1]'(l_1) &= \sqrt{2}(E^2 S^2 [u_1^2]'(0) - E^2 I_3^2 [u_2^2]'''(0)), \\ E^1 I_3^1 [u_2^1]'''(l_1) &= \sqrt{2}(E^2 S^2 [u_1^2]'(0) + E^2 I_3^2 [u_2^2]'''(0)), \\ E^1 I_2^1 [u_3^1]'''(l_1) &= E^2 I_2^2 [u_3^2]'''(0), \\ E^2 S^2 [u_1^2]'(l_2) &= -E^3 I_2^3 [u_3^3]'''(0), \\ E^2 I_3^2 [u_2^2]'''(l_2) &= E^3 I_3^3 [u_3^3]'''(0), \\ E^2 I_2^2 [u_3^2]'''(l_2) &= E^3 S^3 [u_1^3]'(0). \end{aligned}$$

Les conditions de raccord des moments aux articulations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \mu^1 J^1 [\theta_1^1]'(l_1) &= \sqrt{2}(\mu^2 J^2 [\theta_1^2]'(0) - E^2 I_2^2 [u_3^2]''(0)), \\
 E^1 I_1^1 [u_3^1]''(l_1) &= \sqrt{2}(\mu^2 J^2 [\theta_1^2]'(0) + E^2 I_2^2 [u_3^2]''(0)), \\
 E^1 I_3^1 [u_2^1]''(l_1) &= E^2 I_3^2 [u_2^2]''(0), \\
 \mu^2 J^2 [\theta_1^2]'(l_2) &= E^3 I_3^3 [u_2^3]''(0), \\
 E^2 I_2^2 [u_3^2]''(l_2) &= E^3 I_2^3 [u_3^3]''(0), \\
 E^2 I_3^2 [u_2^2]''(l_2) &= -\mu^3 J^3 [\theta_1^3]'(0).
 \end{aligned}$$

Les axes des deux charnières de la structure sont respectivement  $\underline{e}_3^1$  et  $\underline{e}_1^2$ . Nous prenons  $k_3^1 = 10 N.m$  et  $k_1^2 = 10 N.m$  ainsi que  $k_j^1 \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, 2$  et  $k_j^2 \rightarrow \infty$ ,  $j = 2, 3$ .

Les caractéristiques du test sont les suivantes :

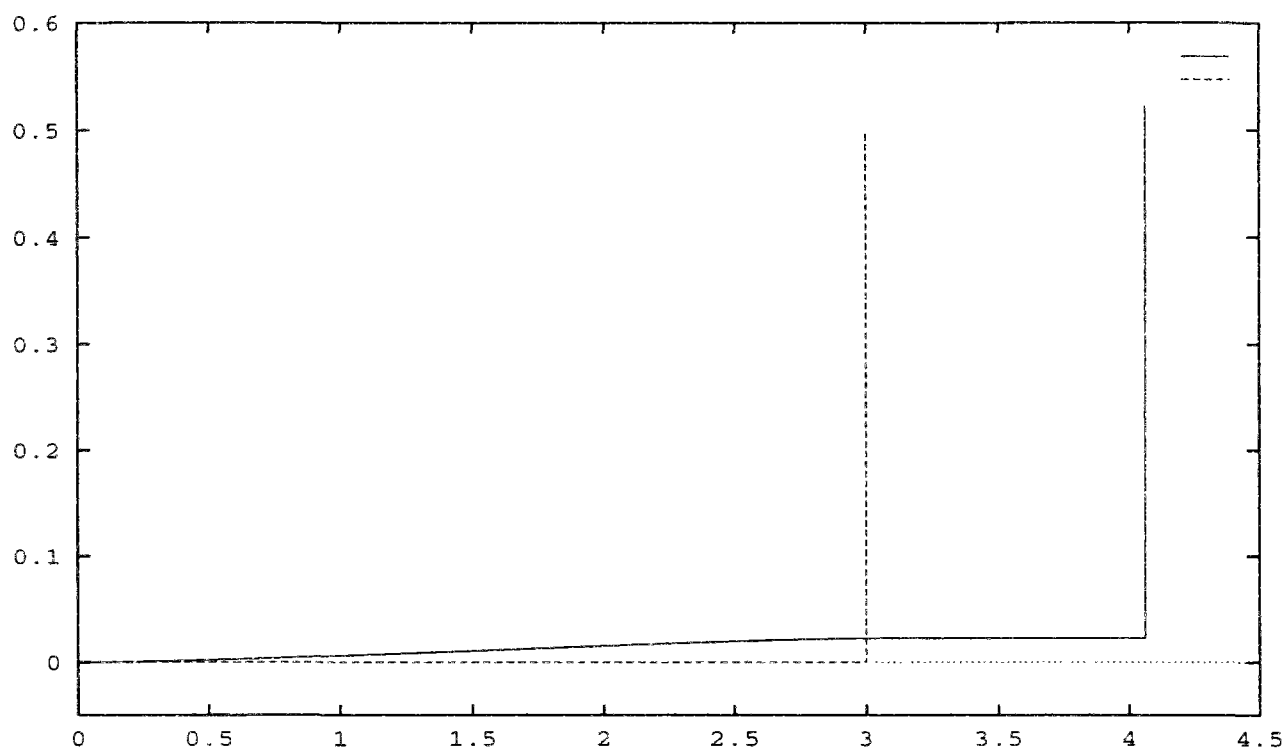
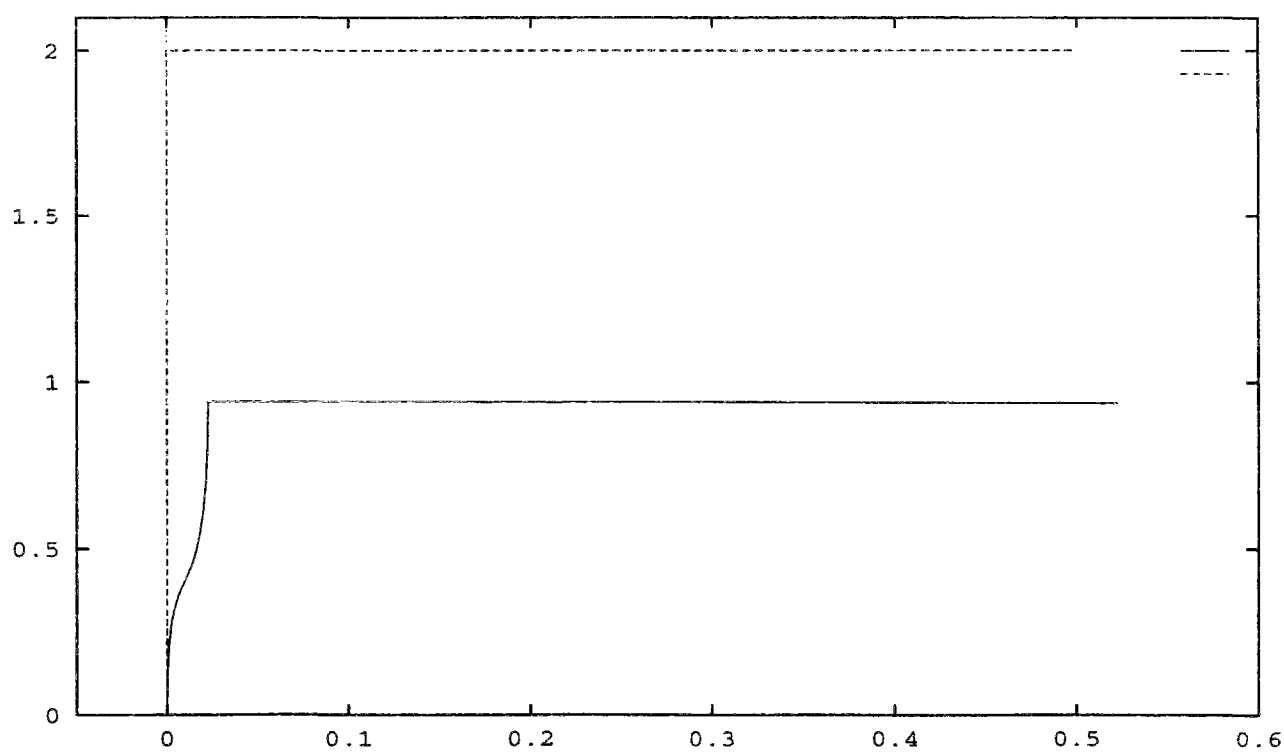
### Chargement

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} \\ \mathcal{F}_j = 2 N, \end{array} \right. \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1^1 = -10 \frac{\sqrt{2}}{2} N, \\ f_2^1 = -10 \frac{\sqrt{2}}{2} N, \\ f_3^1 = 0, \end{array} \right. \quad \underline{f}^2 \equiv 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1^3 = 0, \\ f_2^3 = -10 N, \\ f_3^3 = 0. \end{array} \right.$$

### Conditions de raccord

$$\begin{aligned}
 (u_1^i)(l_i)^G &= (u_1^2)^G(0) \\
 (u_2^i)(l_i)^G &= (u_2^2)^G(0) \\
 (u_3^i)(l_i)^G &= (u_3^2)^G(0) & i = 1, 2 \\
 (\theta_1^1)^G(l_1) &= (\theta_1^2)^G(0) \\
 ([u_3^1]')^G(l_1) &= ([u_3^2]')^G(0) \\
 ([u_2^2]')^G(l_2) &= ([u_2^3]')^G(0) \\
 ([u_3^2]')^G(l_2) &= ([u_3^3]')^G(0) \\
 E^1 I_1^3 [u_2^1]''(l_1) &= -k_3^2 ([u_2^1]'(l_1) - [u_2^2]'(0)) \\
 \mu^2 J^2 [\theta_1^2]'(l_2) &= -k_1^2 (\theta_1^2(l_2) - \theta_1^3(0))
 \end{aligned}$$

Enfin le test est effectué avec un maillage comprenant 13 éléments de poutre droite pour la poutre 1, 10 pour la poutre 2 et 5 pour la poutre 3 ainsi que deux éléments de raccord.

FIG. 1.13 - *Maillage initial et déformée : Plan  $(e_1^a, e_2^a)$* FIG. 1.14 - *Maillage initial et déformée : Plan  $(e_2^a, e_3^a)$*



# Chapitre 2

## Approche globale

---

### 2.1 Introduction et notations

Nous considérons une chaîne ouverte simple, constituée de  $nt$  poutres flexibles et nous adoptons le même principe de numérotation des poutres de la chaîne que celui adopté pour l'approche convective. Nous envisageons le cas où la première poutre de la chaîne est encastrée dans un support rigide fixe et le cas où il existe une liaison pivot entre la première poutre de la chaîne et un support rigide fixe. Nous nous restreignons en outre au cas où les articulations entre les poutres de la chaîne sont de type pivot.

Nous nous donnons une configuration de référence, physique, dans laquelle chacune des barres associées aux poutres de la chaîne est considérée comme un cylindre droit, d'axe moyen constituée par la poutre associée, supposée *rectiligne* en configuration de référence. La barre d'indice  $i$  en configuration de référence peut ainsi être identifiée au domaine de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$\Omega_i = \{({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is), 0 \leq s \leq l_i, ({}^iX_1, {}^iX_2) \in \bar{\Omega}_i({}^is)\}$$

où  $l_i$  et  $\bar{\Omega}_i({}^is)$  désignent respectivement la longueur et la section droite de la barre  $i$ . Comme pour l'approche convective, nous associons à la barre  $i$  la base principale d'inertie  $\{e^i\} = (\underline{e}_1^i, \underline{e}_2^i, \underline{e}_3^i)$ , le vecteur  $\underline{e}_3^i$  étant choisi de façon à orienter la poutre  $i$  en configuration de référence. Le point de contact  $O_i$  entre la poutre  $i$  et la poutre  $i - 1$  est choisi comme origine du repère principal d'inertie  $[O_i, \{e^i\}]$  de la barre  $i$ .

Suivant **Bourgat, Le Tallec & Mani [1988]**, nous adoptons alors la représentation suivante :

$$(2.1) \quad {}^ix({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is) = {}^ir({}^is) + {}^iX_1 {}^id_1({}^is) + {}^iX_2 {}^id_2({}^is) \quad \forall ({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is) \in \Omega_i$$



où on note :

- ${}^i\mathbf{x}$  le vecteur-position, *après déformation*, d'une particule de la barre repérée en configuration de référence par les coordonnées  $({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is)$  dans  $[O_i, \{e^i\}]$ .
- ${}^i\mathbf{r}({}^is)$  le vecteur-position du centroïde la section où se trouve cette particule.
- $\{{}^i\mathbf{d}\} = ({}^i\mathbf{d}_1({}^is), {}^i\mathbf{d}_2({}^is), {}^i\mathbf{d}_3({}^is))$  la base orthonormée, dépendant de la section où se trouve la particule, dont deux directions sont les directions principales d'inertie de cette section, la troisième étant orthogonale à la section.

Cette représentation permet la prise en compte de l'allongement et des flexions de la barre  $i$ , mais aussi des cisaillements transverses et de la torsion. Le vecteur  ${}^i\mathbf{d}_3({}^is)$  n'est en effet pas astreint, *a priori*, à être tangent à l'axe moyen de la poutre - les sections peuvent donc tourner librement autour de leurs centroïdes. Cependant, cette représentation n'autorise pas les déformations *dans le plan* de la section - ce qui revient à supposer les sections suffisamment raides ou raidies à l'aide de raidisseurs.

Nous introduisons de plus les quantités mécaniques suivantes :

- ${}^i\mathbf{E}, {}^i\mathbf{G}$  : module d'Young et module de cisaillement de la barre  $i$  ;
- ${}^i\mathbf{f}({}^is)$  : densité linéique d'efforts extérieurs exercés sur la barre  $i$ , de composantes  $({}^i\mathbf{f}_1, {}^i\mathbf{f}_2, {}^i\mathbf{f}_3)$  dans  $[O_i, \{e^i\}]$  ;
- $\mathcal{F}$  : force appliquée à l'extrémité du dernier maillon de la chaîne, de composantes  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$  dans  $[O_{nt}, \{e^{nt}\}]$ .

ainsi que les quantités géométriques :

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{S} &= \int_{\bar{\Omega}_i({}^is)} d^iX_1 d^iX_2, \\ {}^i\mathbf{I}_1 &= \int_{\bar{\Omega}_i({}^is)} ({}^iX_2)^2 d^iX_1 d^iX_2, \\ {}^i\mathbf{I}_2 &= \int_{\bar{\Omega}_i({}^is)} ({}^iX_1)^2 d^iX_1 d^iX_2, \\ {}^i\mathcal{T} &= O_{i-1} \overrightarrow{O_i}. \end{aligned}$$

Nous introduisons le repère cartésien absolu  $[O, \{e^a\}] = [O, (\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)]$  et nous notons enfin par un ' la dérivation par rapport à  ${}^is$ .

Nous nous restreignons dans la suite de l'étude, au cas où  $\bar{\Omega}_i$  ne dépend pas de  ${}^i s$ .

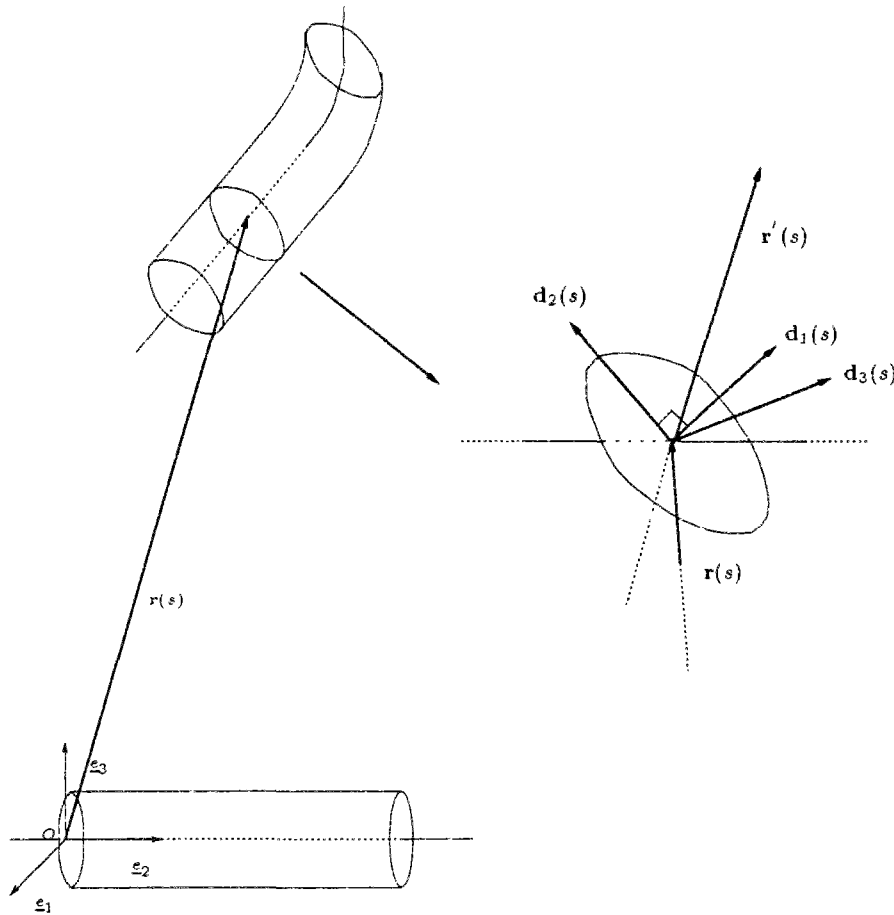


FIG. 2.1 - Configurations et repères

## 2.2 Modèle mécanique

Suivant Bourgat, Le Tallec & Mani [1988], nous introduisons les mesures de déformations :

$$(2.2) \quad {}^i u_j = \frac{1}{2} e_{[j,k,l]} {}^i \mathbf{d}'_k \cdot {}^i \mathbf{d}_l$$

et :

$$(2.3) \quad {}^i v_k = {}^i \mathbf{r}' \cdot {}^i \mathbf{d}_k$$

où  $e_{[j,k,l]}$  est la signature de la permutation qui envoie  $[1, 2, 3]$  sur  $[j, k, l]$ . L'interprétation mécanique de ces quantités est la suivante : dans la base locale  $\{{}^i \mathbf{d}\}$ , les

quantités  ${}^i u_1$  et  ${}^i u_2$  mesurent la flexion,  ${}^i u_3$  la torsion,  ${}^i v_1$  et  ${}^i v_2$  le cisaillement et  ${}^i v_3$  l'allongement de la fibre moyenne.

Nous nous restreignons au cas de barres à sections *circulaires* et nous adoptons, pour la densité linéique d'énergie de déformation, l'expression suivante :

$$(2.4) {}^i w^e(s) = \frac{{}^i \mathbf{G}^i \mathbf{S}}{2} ({}^i v_1^2 + {}^i v_2^2) + \frac{{}^i \mathbf{E}^i \mathbf{S}}{2} ({}^i v_3 - 1)^2 + \frac{{}^i \mathbf{E}^i \mathbf{I}}{2} ({}^i u_1^2 + {}^i u_2^2) + {}^i \mathbf{G}^i \mathbf{I} {}^i u_3^2$$

où  ${}^i \mathbf{I}$  est la valeur commune de  ${}^i \mathbf{I}_1$  et de  ${}^i \mathbf{I}_2$ , supposée indépendante de  ${}^i s$ .

Nous adoptons, pour chaque poutre de la chaîne, le modèle mécanique de **Simo** [1985].

#### • Loi de comportement

$$(2.5) \quad \begin{cases} {}^i \mathbf{m}({}^i s) = \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathbf{d}_l({}^i s) \\ {}^i \mathbf{n}({}^i s) = \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathbf{d}_l({}^i s) \end{cases}$$

Mécaniquement, la quantité  ${}^i \mathbf{n}$  s'interprète comme une densité d'*efforts* intérieurs, la quantité  ${}^i \mathbf{m}$  comme une densité de *moments* intérieurs.

#### • Équations d'équilibre

$$(2.6) \quad \begin{cases} {}^i \mathbf{m}' + {}^i \mathbf{r}' \wedge {}^i \mathbf{n} = 0 \\ {}^i \mathbf{n}' + {}^i \mathbf{f} = 0 \end{cases}$$

## 2.3 Conditions aux limites, contraintes, conditions de jonction

### 2.3.1 Conditions aux limites et contraintes

Dans le cas où la première poutre de la chaîne est encastrée dans un support rigide fixe, nous avons les conditions :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} {}^1 \mathbf{r}(0) &= 0, \\ {}^1 \mathbf{d}_j(0) &= \mathbf{d}_j^0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

où  $(\mathbf{d}_1^0, \mathbf{d}_2^0, \mathbf{d}_3^0)$  est une base orthonormée fixe.

Dans le cas où il existe une liaison pivot, entre la première poutre de la chaîne et un support rigide fixe, nous supposons que l'un des vecteurs  $\{{}^1\mathbf{d}_j(0)\}_{j=1,\dots,3}$  se confond avec un des vecteurs directeurs normés, noté  $\mathbf{u}_0$ , de l'axe de cette liaison. Nous écrivons donc :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} {}^1\mathbf{r}(0) &= 0, \\ {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) &= \mathbf{u}_0, \\ {}^1\mathbf{m}(0) \cdot {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) &= 0, \quad \text{pour un } j_0 \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Nous avons également des conditions de compatibilité des champs d'efforts et de moments internes avec le chargement extérieur :

$$(2.9) \quad \begin{cases} {}^{nt}\mathbf{n}(l_{nt}) = \mathcal{F}, \\ {}^{nt}\mathbf{m}(l_{nt}) = 0. \end{cases}$$

Enfin, l'orthonormalité des vecteurs  $\{{}^i\mathbf{d}_j\}_{j=1,\dots,3}$ , se traduit par les contraintes :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt \quad {}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k &= \delta_j^k \\ ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 &> 0 \end{aligned}$$

### 2.3.2 Modèle de jonction

Les articulations de la chaîne transmettent intégralement les déplacements, ainsi que les efforts et moments intérieurs. Nous avons donc les conditions de raccord :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt - 1 \quad {}^i\mathbf{r}(l_i) &= {}^{i+1}\mathcal{T} + {}^{i+1}\mathbf{r}(0), \\ {}^i\mathbf{n}(l_i) &= {}^{i+1}\mathbf{n}(0), \\ {}^i\mathbf{m}(l_i) &= {}^{i+1}\mathbf{m}(0). \end{aligned}$$

Soit  $i$  un indice appartenant à  $\{2, \dots, nt\}$ . Nous devons exprimer le fait que l'articulation entre la poutre  $i$  et la poutre  $i-1$  est de type pivot. Nous nous restreignons au cas où les axes des articulations des poutres de la chaîne sont choisis parmi les vecteurs  ${}^i\mathbf{d}_j, i = 1, \dots, nt, j = 1, 2, 3$ . Nous faisons l'hypothèse que l'égalité :

$$(2.12) \quad {}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}).$$

a lieu pour un couple  $({}^0j_i, {}^{i-1}j_{i-1})$  donné dans  $\{1, 2, 3\}^2$  et un réel  $\epsilon_i$  donné dans  $\{-1, +1\}$ .

Soient  $({}^0k_i, {}^0l_i) \in \{1, 2, 3\}^2$  tels que la famille

$$\{{}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}(0), {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0), {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0)\}$$

constitue une base orthonormée *directe*. Soient  $({}^{l-1}k_{i-1}, {}^{l-1}l_i) \in \{1, 2, 3\}^2$  tels que la famille

$$\{{}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1j_{i-1}}(l_{i-1}), {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}), {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_i}(l_{i-1})\}$$

constitue une base orthonormée *directe*. De par la nature de l'articulation, le mouvement relatif entre les poutres  $i$  et  $i-1$  a lieu dans le plan commun aux quatre vecteurs

$$\{({}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0), {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0)), ({}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}), {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_i}(l_{i-1}))\}$$

et nous faisons l'hypothèse *fondamentale* que le moment articulaire est du type moment de rappel, opposé au mouvement relatif des deux poutres. Nous postulons donc l'existence de trois réels  $\kappa_{i-1}$  (strictement positif),  ${}^0\theta_i$  et  ${}^{l-1}\theta_{i-1}$  (**indépendants des inconnues**  $\{({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)\}_{i=1,\dots,nt}$  **du problème**) tels que :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} {}^i\dot{\mathbf{m}}(0) &= {}^{i-1}\mathbf{m}(l_{i-1}), \\ &= -\kappa_{i-1} \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{B}_i, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= (\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0)), \\ \mathcal{B}_i &= (\cos({}^{l-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_i}(l_{i-1})). \end{aligned}$$

Les deux réels  ${}^0\theta_i$  et  ${}^{l-1}\theta_{i-1}$  sont choisis de façon à annuler le moment articulaire en configuration de référence. Nous illustrons ci-après notre construction par un exemple (Figures 2.2 et 2.3).

L'expression de ce moment articulaire permet de **ramener la formulation variationnelle des équations d'équilibre de la structure à un problème de minimisation**, comme nous le verrons plus loin.

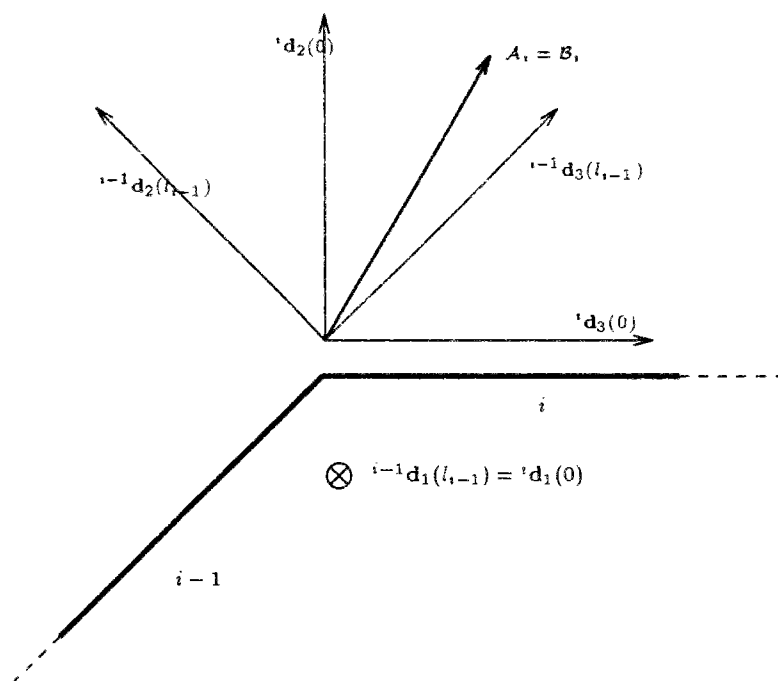


FIG. 2.2 - Configuration de référence

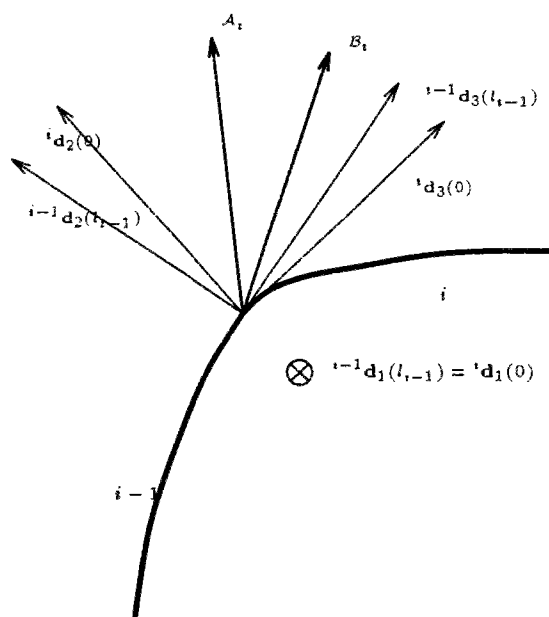


FIG. 2.3 - Configuration déformée

## 2.4 Formulation variationnelle

### 2.4.1 Cadre fonctionnel

Soient les espaces :

$$(2.14) \quad \mathcal{H}_i = H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3), \mathcal{H} = \prod_{i=1}^{nt} \mathcal{H}_i^4, \mathcal{H}_{3,i} = H^1(0, l_i; \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

On s'intéresse à l'espace des **configurations** cinématiquement admissibles. Compte tenu de ce qui précède, cet espace s'identifie à :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \{ \{ {}^i\mathbf{r}, \{ {}^i\mathbf{d}_j \}_{j=1,2,3} \}_{i=1,\dots,nt} = ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{r}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1}\mathcal{T} + {}^{i+1}\mathbf{r}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1\mathbf{d}_j(0) = \mathbf{d}_j^0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}(0) = \epsilon_i^{i-1} \mathbf{d}_{i-1, j_{i-1}}(l_{i-1}) ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad {}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k = \delta_j^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 > 0 \} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que cet espace possède une structure de **sous-variété de classe  $C^\infty$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$** . Nous rappelons d'abord deux résultats importants :

**Lemme 2.4.1 Abraham & Robbin [1967], Bourgat, Le Tallec & Mani [1988] :**  
*Si il existe  $\mathcal{H}$  un Hilbert,  $\mathcal{S}$  un sous-espace affine fermé de  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{M}$  un ouvert de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{G}$  une application  $C^\infty$  (resp. différentiable) opérant sur  $\mathcal{M}$ , à gradient surjectif et telle que  $\mathcal{E}$  est le noyau de  $\mathcal{G}$ , alors  $\mathcal{E}$  est une sous-variété différentielle de classe  $C^\infty$  (resp. différentiable) de  $\mathcal{M}$ . L'espace tangent à  $\mathcal{E}$  en un point  $P$  de  $\mathcal{E}$  est le noyau du gradient de  $\mathcal{G}$  en  $P$ .*

**Lemme 2.4.2 Pöschel & Trubowitz [1985] :** *Si  $\mathcal{E}$  est un ouvert (resp. un fermé) d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , alors  $\mathcal{E}$  est une sous-variété différentielle de classe  $C^\infty$  de  $\mathcal{H}$ . de  $\mathcal{H}$ . En particulier, si  $\mathcal{E}$  est un fermé d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}$  est l'espace tangent à  $\mathcal{E}$  en tout point de  $\mathcal{E}$ .*

Nous cherchons à rejoindre le lemme 2.4.1. Nous construisons successivement un sous-espace affine fermé  $\mathcal{S}$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  défini par (2.14), un ouvert  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{S}$  et une application  $\mathcal{G}$ , définie sur  $\mathcal{M}$ , à gradient surjectif et dont  $\mathcal{K}$  est le noyau.

Nous introduisons ainsi les trois espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \{({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{r}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1}\mathcal{T} + {}^{i+1}\mathbf{r}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1\mathbf{d}_j(0) = \mathbf{d}_j^0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \ {}^i\mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ \mathcal{M} = & \{({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{S} \text{ vérifiant : } \forall i \in \{1, \dots, nt\} \ ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 > 0\}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & \{({}^1\mathcal{B}, \dots, {}^{nt}\mathcal{B}, {}^1\mathcal{V}, \dots, {}^{nt}\mathcal{V}) \in [\mathcal{H}_{3,1}]^4 \times \dots \times [\mathcal{H}_{3,nt}]^4 \text{ vérifiant :} \\ & \forall i \in 1, \dots, nt \ {}^i\mathcal{B} \text{ symétrique ; } \forall i \in 1, \dots, nt \ {}^i\mathcal{B}(0) = 0 ; \\ & \forall i \in 1, \dots, nt - 1 \ {}^i\mathcal{B}(l_i) = 0 ; \} \end{aligned}$$

ainsi que l'application :

$$\mathcal{G} = \begin{cases} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \\ ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \rightarrow \{[{}^1\mathbf{d}_i \cdot {}^1\mathbf{d}_j - \delta_i^j]_{1 \leq i,j \leq 3}, \dots, [{}^{nt}\mathbf{d}_i \cdot {}^{nt}\mathbf{d}_j - \delta_i^j]_{1 \leq i,j \leq 3}\} \end{cases}$$

Nous admettons provisoirement le lemme :

**Lemme 2.4.3** *L'espace  $\mathcal{M}$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de l'espace*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = & \{({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{r}(0) = 0 ; \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \ {}^i\mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}) \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \ ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 > 0\}, \end{aligned}$$

dont l'espace tangent  $\delta\mathcal{M}$  en un point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$ , indépendant du point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  considéré, est donné par :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M} = & \{({}^i\mathbf{p}, \{{}^i\mathbf{g}_j\}_{j=1,2,3})_{i=1,\dots,nt} = ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1}\mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1\mathbf{g}_j(0) = 0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1\mathbf{g}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \ {}^i\mathbf{g}_{0_{j_i}}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1})\} \end{aligned}$$



et nous montrons le lemme suivant :

**Lemme 2.4.4**  $\mathcal{G}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{H}$  et  $\nabla_{({}^1\mathbf{r}, {}^1\mathbf{d}_j)} \mathcal{G}$  est surjectif pour tout point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  de  $\mathcal{K}$ .

Démonstration :

• Régularité

$\mathcal{G}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{H}$  en tant qu'application polynomiale définie sur un produit d'algèbres.

• Surjectivité du gradient

Il suffit de remarquer que, pour tout  $({}^1\mathcal{B}, \dots, {}^{nt}\mathcal{B}) \in \mathcal{N}$ , on a :

$$({}^1\mathbf{r}, \frac{1}{2} {}^1\mathcal{B}_{j,k} {}^1\mathbf{d}_k, \dots, {}^{nt}\mathbf{r}, \frac{1}{2} {}^{nt}\mathcal{B}_{j,k} {}^{nt}\mathbf{d}_k) \in \delta\mathcal{M}$$

et :

$$\nabla_{({}^1\mathbf{r}, {}^1\mathbf{d}_j)} \mathcal{G}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) \cdot ({}^1\mathbf{r}, \frac{1}{2} {}^1\mathcal{B}_{j,k} {}^1\mathbf{d}_k, \dots, {}^{nt}\mathbf{r}, \frac{1}{2} {}^{nt}\mathcal{B}_{j,k} {}^{nt}\mathbf{d}_k) = ({}^1\mathcal{B}, \dots, {}^{nt}\mathcal{B})$$

□

D'après le lemme 2.4.1, le lemme 2.4.4 suffit pour montrer que  $\mathcal{K}$  est une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathcal{M}$ . D'après l'expression de  $\mathcal{G}$ , son espace tangent  $\delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$  en un point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  est donné par :

$$\delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \{({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{M} \text{ tel que : } [{}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{g}_k + {}^i\mathbf{g}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k]_{1 \leq j, k \leq 3} = 0 \forall i \in \{1, \dots, nt\}\}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = & \{({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1}\mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1\mathbf{g}_j(0) = 0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1\mathbf{g}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \ {}^i\mathbf{g}_{j_i}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{g}_{j_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{H}_i \text{ tel que : } {}^i\mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_j \forall j \in \{1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$

Enfin le lemme 2.4.3 est une conséquence directe des lemmes 2.4.1 et 2.4.2 et se démontre comme le lemme 2.4.4. L'espace de Hilbert  $\mathcal{S}_1$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = & \{({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{r}(0) = 0 ; \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \ {}^i\mathbf{d}_{j_i}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{j_{i-1}}(l_{i-1})\} \end{aligned}$$

est un sous-espace affine fermé de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et l'espace  $\mathcal{M}_1$  est un ouvert de  $\mathcal{S}_1$ . Enfin, l'espace  $\mathcal{M}$  est le noyau de l'application  $\mathcal{G}_1$  définie sur  $\mathcal{M}_1$  par :

$$\mathcal{G}_1(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \{ \{{}^1\mathbf{d}_j(0) - \mathbf{d}_j^0\}_{\{j=1,2,3\}}, \{{}^i\mathbf{r}(l_i) - {}^{i+1}\mathbf{r}(0) - {}^{i+1}\mathcal{T}\}_{\{i=1,\dots,nt-1\}} \}$$

si (2.7) est vérifiée, et par

$$\mathcal{G}_1(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \{{}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) - \mathbf{u}_0, \{{}^i\mathbf{r}(l_i) - {}^{i+1}\mathbf{r}(0) - {}^{i+1}\mathcal{T}\}_{\{i=1,\dots,nt-1\}}\}$$

si (2.8) est vérifiée.

## 2.4.2 Formulation variationnelle

Nous allons maintenant montrer le théorème :

**Théorème 2.4.1** *Les équations d'équilibre (2.6) sont équivalentes au problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  :*

*Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}$  tel que :  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$  :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0l_i}(0)\} \end{aligned} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} \, d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$(2.15) \quad \mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) \, d^i s$$

**Démonstration** D'après l'expression (2.4) de la densité d'énergie  ${}^i w^e$ , nous pouvons affirmer que les deux hypothèses de régularité suivantes sont vérifiées :

- Pour tout  $i \in \{1, \dots, nt\}$  :

$$(2.16) \quad {}^i w^e({}^i s, \cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^6) \text{ p.p sur } ]0; l_i[$$

- Pour tout  $j \in \{1, \dots, nt\}$  et pour tout  $(^j u_k, ^j v_k, ^j \mathcal{U}_k, ^j \mathcal{V}_k) \in L^2(0, l_j; \mathbb{R}^{12})$ :

$$\left| \frac{\partial ^j w^e}{\partial ^j u_i} (^j s, ^j u_k, ^j v_l) ^j \mathcal{U}_i + \frac{\partial ^j w^e}{\partial ^j v_i} (^j s, ^j u_k, ^j v_l) ^j \mathcal{V}_i \right| \leq [^j \mathcal{C}_0 + ^j \mathcal{C}_1 (^j u_k^2 + ^j v_l^2)^{\frac{1}{2}}] [^j \mathcal{U}_k^2 + ^j \mathcal{V}_l^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

où  $^j \mathcal{C}_0$  et  $^j \mathcal{C}_1$  sont des constantes réelles strictement positives.

On calcule ensuite les gradients :

$$^i \mathcal{U}_j = \frac{\partial ^i u_j}{\partial (^i \mathbf{r}, ^i \mathbf{d}_j)} \cdot (^i \mathbf{p}, ^i \mathbf{g}_j)$$

$$^i \mathcal{V}_j = \frac{\partial ^i v_j}{\partial (^i \mathbf{r}, ^i \mathbf{d}_j)} \cdot (^i \mathbf{p}, ^i \mathbf{g}_j)$$

On obtient, tous calculs faits :

$$(2.18) \quad \begin{cases} ^i \mathcal{U}_j = \frac{1}{2} e_{[j,k,l]} (^i \mathbf{g}'_k \cdot ^i \mathbf{d}_l + ^i \mathbf{d}'_k \cdot ^i \mathbf{g}_l) \\ ^i \mathcal{V}_j = ^i \mathbf{p}' \cdot ^i \mathbf{d}_k + ^i \mathbf{r}' \cdot ^i \mathbf{g}_k \end{cases}$$

Nous avons donc, d'après la définition de  $\delta \mathcal{K}((^i \mathbf{r}, ^i \mathbf{d}_j))$ , les relations :

$$^i \mathcal{U}_j = \frac{1}{2} e_{[j,k,l]} \{ [\mathcal{U}'_i \wedge ^i \mathbf{d}_k + \mathcal{U}_i \wedge ^i \mathbf{d}'_k] \cdot ^i \mathbf{d}_l + [\mathcal{U}_i \wedge ^i \mathbf{d}_l] \cdot ^i \mathbf{d}'_k \}$$

soit :

$$^i \mathcal{U}_j = \frac{1}{2} e_{[j,k,l]} [^i \mathbf{d}_k \wedge ^i \mathbf{d}_l] \cdot \mathcal{U}'_i = \mathcal{U}'_i \cdot ^i \mathbf{d}_j$$

et donc :

$$(2.19) \quad \mathcal{U}'_i = ^i \mathcal{U}_j ^i \mathbf{d}_j$$

De même :

$$(2.20) \quad ^i \mathbf{p}' = ^i \mathcal{V}_k ^i \mathbf{d}_k + \mathcal{U}_i \wedge ^i \mathbf{r}'$$

Pour tout indice  $i$  dans  $\{1, \dots, nt\}$ , on considère  $(^i u_j, ^i v_k, ^i \mathcal{U}_j, ^i \mathcal{V}_k) \in L^2(0, l_i; \mathbb{R}^{12})$  et on introduit l'opérateur :

$$\Delta_\tau ^i w^e(^i s) = \frac{1}{\tau} [^i w^e(^i s, ^i u_j + \tau ^i \mathcal{U}_j, ^i v_k + \tau ^i \mathcal{V}_k) - ^i w^e(^i s, ^i u_j, ^i v_k)]$$

où  $\tau$  est un paramètre réel vérifiant  $|\tau| \leq 1$ .

D'après le théorème des accroissements finis et l'hypothèse (2.16), nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} & |\Delta_\tau {}^i w^e({}^i s)| = \\ & \left| \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l}({}^i s, {}^i u_j + \tau \theta {}^i \mathcal{U}_j, {}^i v_k + \tau \theta {}^i \mathcal{V}_k) {}^i \mathcal{U}_l + \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l}({}^i s, {}^i u_j + \tau \theta {}^i \mathcal{U}_j, {}^i v_k + \tau \theta {}^i \mathcal{V}_k) {}^i \mathcal{V}_l \right| \end{aligned}$$

où  $\theta$  est un paramètre réel vérifiant  $|\theta| \leq 1$ .

D'après l'hypothèse (2.17), nous pouvons en déduire la majoration :

$$|\Delta_\tau {}^i w^e({}^i s)| \leq [{}^j \mathcal{C}_0 + 2 {}^j \mathcal{C}_1 ({}^j u_k^2 + {}^j v_l^2 + {}^j \mathcal{U}_k^2 + {}^j \mathcal{V}_l^2)^{\frac{1}{2}}] [{}^j \mathcal{U}_k^2 + {}^j \mathcal{V}_l^2]^{\frac{1}{2}}$$

Le membre de droite de l'inégalité précédente est intégrable par hypothèse, et indépendant de  $\tau$ . On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite  $\Delta_\tau {}^i w^e$  sur  $]0; l_i[$  et donc :

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_i} \lim_{\tau \rightarrow 0} \{ \Delta_\tau {}^i w^e({}^i s) \} d {}^i s = \\ & \int_0^{l_i} \left\{ \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{U}_l + \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{V}_l \right\} d {}^i s \\ & = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j + \tau {}^i \mathcal{U}_j, {}^i v_k + \tau {}^i \mathcal{V}_k) d {}^i s - \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) d {}^i s \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial ({}^i u_j, {}^i v_k)} \left[ \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) d {}^i s \right] \cdot ({}^i \mathcal{U}_j, {}^i \mathcal{V}_k) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_i} \left\{ \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{U}_l + \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{V}_l \right\} d {}^i s = \\ & \frac{\partial}{\partial ({}^1 u_j, {}^1 v_k, \dots, {}^{nt} u_j, {}^{nt} v_k)} \left[ \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) d {}^i s \right] \cdot ({}^1 \mathcal{U}_j, {}^1 \mathcal{V}_k, \dots, {}^{nt} \mathcal{U}_j, {}^{nt} \mathcal{V}_k) \end{aligned}$$

les déformations définies par (2.2),(2.3) sur la poutre  $i$  étant indépendantes des déformations correspondantes sur les poutres  $j$ ,  $j \neq i$ .

Par dérivation de fonctions composées - loisible, car d'après (2.18), les fonctions  $({}^i u_j, {}^i v_k)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathcal{H}_i^4$  vers  $L^2(0, l_i; \mathbb{R}^{12})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{J}(({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j))}{\partial ({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i \mathbf{p}, {}^i \mathbf{g}_j) = \\ (2.21) \quad & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \left\{ \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{U}_l + \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{V}_l \right\} d {}^i s \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  peut se réécrire :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}$  tel que :  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \left\{ \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l} ({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{U}_l + \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l} ({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{V}_l \right\} d^i s \\
& + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{0l_i}(0) \} \\ & + \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{0l_i}(0) \} \end{aligned} \right\} \\
& = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i \mathbf{f} \cdot {}^i \mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt} \mathbf{p}(l_{nt})
\end{aligned}$$

D'après les relations (2.19), (2.20) et le modèle (2.6), on peut aussi écrire ce problème sous la forme :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}$  tel que :  $\forall ({}^1\mathbf{p}, \mathcal{U}_1 \wedge {}^1\mathbf{d}_j, \dots, {}^{nt}\mathbf{p}, \mathcal{U}_{nt} \wedge {}^{nt}\mathbf{d}_j) \in \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \{ {}^i \mathbf{m} \cdot \mathcal{U}_i' + {}^i \mathbf{n} \cdot ({}^i \mathbf{p}' - \mathcal{U}_i \wedge {}^i \mathbf{r}') \} d^i s \\
& + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{0l_i}(0) \} \\ & + \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{0l_i}(0) \} \end{aligned} \right\} \\
& = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i \mathbf{f} \cdot {}^i \mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt} \mathbf{p}(l_{nt})
\end{aligned}$$

On opère ensuite une intégration par parties pour obtenir :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}$  tel que :  $\forall ({}^1\mathbf{p}, \mathcal{U}_1 \wedge {}^1\mathbf{d}_j, \dots, {}^{nt}\mathbf{p}, \mathcal{U}_{nt} \wedge {}^{nt}\mathbf{d}_j) \in \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) :$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \{-{}^i\mathbf{m}' - {}^i\mathbf{r}' \wedge {}^i\mathbf{n}\} \cdot \mathcal{U}_i - \{{}^i\mathbf{n} + {}^i\mathbf{f}\} \cdot {}^i\mathbf{p} \, d^i s \\ & + \sum_{i=1}^{nt} [{}^i\mathbf{m} \cdot \mathcal{U}_i]_0^{l_i} + [{}^i\mathbf{n} \cdot {}^i\mathbf{p}]_0^{l_i} = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} \, d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \\ & - \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ & \cdot \{\cos({}^0\theta_i)^i \mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i)^i \mathbf{d}_{o_{l_i}}(0)\} \\ & + \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1})^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ & \cdot \{\cos({}^0\theta_i)^i \mathbf{g}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i)^i \mathbf{g}_{o_{l_i}}(0)\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

soit encore, en se servant de la relation (2.13) :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}$  tel que :  $\forall ({}^1\mathbf{p}, \mathcal{U}_1 \wedge {}^1\mathbf{d}_j, \dots, {}^{nt}\mathbf{p}, \mathcal{U}_{nt} \wedge {}^{nt}\mathbf{d}_j) \in \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) :$

$$\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \{-{}^i\mathbf{m}' - {}^i\mathbf{r}' \wedge {}^i\mathbf{n}\} \cdot \mathcal{U}_i - \{{}^i\mathbf{n} + {}^i\mathbf{f}\} \cdot {}^i\mathbf{p} \, d^i s = 0$$

et on retrouve la formulation variationnelle des équations d'équilibre (2.6).

### 2.4.3 Résultat d'existence

Nous allons montrer le théorème :

**Théorème 2.4.2** *Si les forces extérieures  $\{{}^i\mathbf{f}\}_{i=1, \dots, nt}$  sont indépendantes des variables  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  et appartiennent à l'espace  $\prod_{i=1}^{nt} H^{-1}(0, l_i; \mathbb{R}^3)$ , alors le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  admet une solution.*

#### Démonstration

Le principe de la démonstration est le suivant : on montre que le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  se ramène à un problème de minimisation d'une fonctionnelle sur une variété différentielle et on applique le théorème de Weierstrass (voir **Bourgat, Le**

Talleg & Mani [1988]).

Nous introduisons une norme sur  $\mathcal{H}$ :

$$(2.22) \quad \|({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{r}\|_{H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3)}^2 + \sum_{j=1}^3 \|{}^i\mathbf{d}_j\|_{H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3)}^2$$

et nous démontrons le lemme:

**Lemme 2.4.5** *Sous les hypothèses du théorème 2.4.2, les opérateurs  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{L}$  définis sur  $\mathcal{H}$  par:*

$$(2.23) \quad \mathcal{Q}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0_{l_i}}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \end{aligned} \right\}$$

et

$$(2.24) \quad \mathcal{L}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{r} \, d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{r}(l_{nt})$$

sont différentiables sur  $\mathcal{H}$ .

Démonstration (du lemme 2.4.5):

Nous disposons de l'injection continue:

$$(2.25) \quad \mathcal{H} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{nt} [C^0(0, l_i; \mathbb{R}^3)]^4.$$

Si les forces extérieures  $\{{}^i\mathbf{f}\}_{i=1, \dots, nt}$  sont indépendantes des variables  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  et appartiennent à l'espace  $\prod_{i=1}^{nt} H^{-1}(0, l_i; \mathbb{R}^3)$ , nous pouvons affirmer, grâce à l'injection (2.25), que la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}$  est continue, donc différentiable sur  $\mathcal{H}$ .

Soit ensuite  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  dans  $\mathcal{H}$ . Pour tous  $i \in \{1 \dots nt - 1\}$ ,  $j, k \in \{1, 2, 3\}$  et pour tout  $({}^i\rho, {}^i\delta_j)$  dans  $\mathcal{H}$ , nous avons:

$$\begin{aligned} ({}^i\mathbf{d}_j(l_i) + {}^i\delta_j(l_i)) \cdot ({}^{i+1}\mathbf{d}_k(0) + {}^{i+1}\delta_k(0)) &= {}^i\mathbf{d}_j(l_i) \cdot {}^{i+1}\mathbf{d}_k(0) \\ &\quad + D({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \cdot ({}^i\rho, {}^i\delta_j) \\ &\quad + {}^i\delta_j(l_i) \cdot {}^{i+1}\delta_k(0) \end{aligned}$$

où l'application **linéaire**  $D({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  définie sur  $\mathcal{H}$  par :

$$D({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) : ({}^i\rho, {}^i\delta_j) \rightarrow {}^i\mathbf{d}_j(l_i) \cdot {}^{i+1}\delta_k(0) + {}^{i+1}\mathbf{d}_k(0) \cdot {}^i\delta_j(l_i)$$

est continue sur  $\mathcal{H}$  de par l'injection (2.25). Toujours grâce à l'injection (2.25), nous avons également :

$$|{}^i\delta_j(l_i) \cdot {}^{i+1}\delta_k(0)| \leq \|({}^i\rho, {}^i\delta_j)\|_{\mathcal{H}}^2$$

Nous pouvons donc conclure à la différentiabilité de  $\mathcal{Q}$  sur  $\mathcal{H}$ . Nous avons, en tout point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  de  $\mathcal{H}$  et pour tout  $({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j)$  dans  $\mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Q}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) &= \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{l_i}}(0)\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Nous avons également, en tout point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  de  $\mathcal{H}$  et pour tout  $({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j)$  dans  $\mathcal{H}$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} \, d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt})$$

□

Nous reprenons maintenant la démonstration du théorème 2.4.2 et nous notons  $({}^i u_j, {}^i v_k)$  l'opérateur  $({}^1 u_j, {}^1 v_k, \dots, {}^{nt} u_j, {}^{nt} v_k)$  défini sur  $\mathcal{H}$ .

• **Faible continuité de  $({}^i u_j, {}^i v_k)$  sur  $\mathcal{H}$ .**

Soit  $\{({}^i\mathbf{r}^n, {}^i\mathbf{d}_j^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite faiblement convergente dans  $\mathcal{H}$ . La suite  $\{([{}^i\mathbf{r}^n]')\}_{n \in \mathbb{N}}$  et chacune des trois suites  $\{([{}^i\mathbf{d}_j^n]')\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors faiblement dans  $\prod_{i=1}^{nt} L^2(0, l_i; \mathbb{R}^3)$ .

Or nous avons :

$$(2.26) \quad \prod_{i=1}^{nt} H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{nt} C^0(0, l_i; \mathbb{R}^3)$$

avec injection compacte. Nous pouvons donc conclure à la convergence forte de chacune des trois suites  $\{({}^i\mathbf{d}_j^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\prod_{i=1}^{nt} C^0(0, l_i; \mathbb{R}^3)$ . Chacune des six suites

produit  $\{({}^i u_j^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{({}^i v_k^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc faiblement dans  $\prod_{i=1}^{nt} L^2(0, l_i; \mathbb{R})$ ,



ce qui permet de conclure à la faible continuité de l'application  $({}^i u_j, {}^i v_k)$  définie sur  $\mathcal{H}$  et à valeurs dans  $\prod_{i=1}^{nt} L^2(0, l_i; \mathbb{R}^6)$ .

• **Faible semi-continuité inférieure.**

Les densités d'énergie  ${}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k)$  définies par (2.4) sont convexes, quadratiques, et à coefficients bornés sur  $\mathbb{R}^6$ . Les fonctions :

$$({}^i u_j, {}^i v_k) \rightarrow \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) d{}^i s$$

sont alors convexes et continues, donc séquentiellement faiblement semi-continues inférieurement, sur  $\prod_{i=1}^{nt} L^2(0, l_i; \mathbb{R}^6)$ . Par sommation, composition et d'après les propriétés de l'opérateur  $\{{}^1 u_j, {}^1 v_k, \dots, {}^{nt} u_j, {}^{nt} v_k\}$ , on en déduit que l'opérateur  $\mathcal{J}$  défini par :

$$\mathcal{J} : ({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) \rightarrow \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) d{}^i s$$

est séquentiellement faiblement semi-continu inférieurement sur  $\mathcal{H}$ .

Considérons maintenant l'opérateur  $\mathcal{Q}$  défini par (2.23). Soit  $\{({}^i \mathbf{r}^n, {}^i \mathbf{d}_j^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite faiblement convergente dans  $\mathcal{H}$ . D'après l'injection compacte (2.26), nous pouvons conclure à la convergence forte de chacune des trois suites  $\{({}^i \mathbf{d}_j^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\prod_{i=1}^{nt} C^0(0, l_i; \mathbb{R}^3)$ . Nous en déduisons la convergence forte de toutes les suites produits du type  $\{({}^i \mathbf{d}_j^n(0) \cdot {}^{i-1} \mathbf{d}_k^n(l_{i-1}))_{i=2, \dots, nt}\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ceci nous permet de conclure à la faible continuité de  $\mathcal{Q}$  sur  $\mathcal{H}$ , par composition avec l'opérateur linéaire à coefficients bornés défini sur  $\mathbb{R}^{4(nt-1)}$  par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{4(nt-1)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i, \alpha_4^i)_{i=1, \dots, nt-1} &\longrightarrow \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0 \theta_i) \cos({}^{i-1} \theta_{i-1}) \alpha_1^{i-1} \\ &+ \cos({}^0 \theta_i) \sin({}^{i-1} \theta_{i-1}) \alpha_2^{i-1} \\ &+ \sin({}^0 \theta_i) \cos({}^{i-1} \theta_{i-1}) \alpha_3^{i-1} \\ &+ \sin({}^0 \theta_i) \sin({}^{i-1} \theta_{i-1}) \alpha_4^{i-1} \} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

D'après la démonstration du lemme 2.4.5, la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}$  définie par (2.24) est continue sur  $\mathcal{H}$  sous les hypothèses du théorème 2.4.2. On en déduit la faible semi-continuité inférieure sur  $\mathcal{H}$  de l'application  $\mathcal{J}_0$  définie sur  $\mathcal{H}$  par :

$$(2.27) \quad \mathcal{J}_0({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) = \mathcal{J}({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) + \mathcal{Q}({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) - \mathcal{L}({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)$$

• **Coercivité de  $\mathcal{J}_0$  sur  $\mathcal{K}$ .**

Nous avons par construction :

$$\mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) \geq \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \left\{ \frac{{}^i\mathbf{G}^i\mathbf{S}}{2} \sum_{k=1}^3 {}^i v_k^2 - \frac{{}^i\mathbf{E}^i\mathbf{S}}{2} \left( \sum_{k=1}^3 {}^i v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + {}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I} \sum_{j=1}^3 {}^i u_j^2 \right\} d^i s$$

Les relations (2.2) et (2.3) nous permettent d'écrire la relation précédente en fonction des seuls éléments de  $\mathcal{K}$ .

$$\mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) \geq \sum_{i=1}^{nt} \left\{ \frac{{}^i\mathbf{G}^i\mathbf{S}}{2} \|{}^i\mathbf{r}'\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{{}^i\mathbf{E}^i\mathbf{S}}{2} \|{}^i\mathbf{r}'\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)} + {}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I} \sum_{j=1}^3 \|{}^i\mathbf{d}_j'\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)} \right\}$$

Nous admettons provisoirement le lemme suivant :

**Lemme 2.4.6** *Il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  strictement positives, ne dépendant que de la géométrie de la configuration de référence et telles que :*

$$\sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{r}'\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 \geq C_1 \sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{r}\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - C_2.$$

D'autre part, puisque pour tout  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  dans  $\mathcal{K}$ , nous avons

$$\|{}^i\mathbf{d}_j\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 = l_i$$

nous pouvons écrire :

$$\|{}^i\mathbf{d}_j'\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 = \|{}^i\mathbf{d}_j\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - l_i$$

Nous en déduisons donc :

$$\mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) \geq \sum_{i=1}^{nt} \left\{ C_1 \frac{{}^i\mathbf{G}^i\mathbf{S}}{2} \|{}^i\mathbf{r}\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{{}^i\mathbf{E}^i\mathbf{S}}{2} \|{}^i\mathbf{r}\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)} + {}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I} \sum_{j=1}^3 (\|{}^i\mathbf{d}_j\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - l_i) \right\} - C_2.$$

En tenant compte en outre de l'injection continue  $\mathcal{H} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{nt} [C^0(0,l_i;\mathbb{R}^3)]^4$ , nous obtenons la minoration :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) &\geq \sum_{i=1}^{nt} \left\{ C_1 \frac{{}^i\mathbf{G}^i\mathbf{S}}{2} \|{}^i\mathbf{r}\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - \left( \frac{{}^i\mathbf{E}^i\mathbf{S}}{2} + \|{}^i\mathbf{f}\|_{H^{-1}(0,l_i;\mathbb{R}^3)} \right) \|{}^i\mathbf{r}\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)} \right. \\ &\quad \left. + {}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I} \sum_{j=1}^3 (\|{}^i\mathbf{d}_j\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - l_i) - \sup_{i=1,\dots,nt-1} \kappa_i \sup_{i=1,\dots,nt} \sum_{j=1}^3 \|{}^i\mathbf{d}_j\|_{H^1(0,l_i;\mathbb{R}^3)} \right\} - C_2 \end{aligned}$$

On en conclut à la coercivité de  $\mathcal{J}_0$  sur  $\mathcal{K}$  pour la norme de  $\mathcal{H}$  définie par (2.22).

• **Existence.**

Par définition, l'espace  $\mathcal{K}$  est égal au noyau de l'application  $\mathcal{G}_0$  définie sur  $\mathcal{H}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) &= \{ \{ {}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k - \delta_j^k \}_{i=1, \dots, nt, j, k=1, 2, 3}, \{ ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 - 1 \}_{i=1, \dots, nt}, \\ &\quad {}^1\mathbf{r}(0), \{ {}^1\mathbf{d}_j(0) - \mathbf{d}_j^0 \}_{j=1, 2, 3}, \{ {}^i\mathbf{r}(l_i) - {}^{i+1}\mathbf{r}(0) - {}^{i+1}\mathcal{T} \}_{i=1, \dots, nt-1}, \\ &\quad \{ {}^i\mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) - \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1} j_{i-1}}(l_{i-1}) \}_{i=2, \dots, nt} \} \end{aligned}$$

si (2.7) est vérifiée, et par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) &= \{ \{ {}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k - \delta_j^k \}_{i=1, \dots, nt, j, k=1, 2, 3}, \{ ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 - 1 \}_{i=1, \dots, nt}, \\ &\quad {}^1\mathbf{r}(0), {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) - \mathbf{u}_0, \{ {}^i\mathbf{r}(l_i) - {}^{i+1}\mathbf{r}(0) - {}^{i+1}\mathcal{T} \}_{i=1, \dots, nt-1}, \\ &\quad \{ {}^i\mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) - \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1} j_{i-1}}(l_{i-1}) \}_{i=2, \dots, nt} \} \end{aligned}$$

si (2.8) est vérifiée.

En raison de l'injection compacte :

$$\prod_{i=1}^{nt} \mathcal{H}^1(0, l_i; \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{nt} C^0(0, l_i; \mathbb{R}^3)$$

l'application  $\mathcal{G}_0$  est faiblement continue sur  $\mathcal{H}$ , ce qui entraîne que  $\mathcal{K}$  est faiblement fermé dans  $\mathcal{H}$ . Le théorème de Weierstrass permet alors d'affirmer que  $\mathcal{J}_0$ , coercive et séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{K}$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  définie ci-dessus, atteint son minimum en un point  $({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)$  de  $\mathcal{K}$ .

L'application  $\mathcal{J}_0$  étant en outre différentiable, d'après (2.21) et le lemme 2.4.5, sur la variété différentielle  $\mathcal{K}$ , son gradient au point  $({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)$  est **orthogonal** à l'espace tangent à  $\mathcal{K}$  en ce point. Ceci se traduit par :

$$\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)) :$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*))}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) + \frac{\partial \mathcal{Q}(({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*))}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) - \frac{\partial \mathcal{L}(({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*))}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) = 0$$

d'où l'on déduit que  $({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)$  est solution du problème variationnel  $[\mathcal{P}]$ .

□

Il reste à démontrer le lemme 2.4.6. Pour un indice  $i \in \{1..nt\}$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{r}(i_s) &= {}^i\mathbf{r}(0) + \int_0^{i_s} {}^i\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma \\
 &= {}^{i-1}\mathbf{r}(l_{i-1}) - {}^i\mathcal{T} + \int_0^{i_s} {}^i\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma \\
 &= {}^{i-1}\mathbf{r}(0) + \int_0^{l_{i-1}} {}^{i-1}\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma - {}^i\mathcal{T} + \int_0^{i_s} {}^i\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma \\
 &= {}^{i-2}\mathbf{r}(l_{i-2}) - {}^{i-1}\mathcal{T} - {}^i\mathcal{T} \\
 &\quad + \int_0^{l_{i-2}} {}^{i-2}\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma + \int_0^{l_{i-1}} {}^{i-1}\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma + \int_0^{i_s} {}^i\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma
 \end{aligned}$$

où nous avons fait appel aux conditions de raccord (2.11) :

$$\forall i = 1, \dots, nt-1 \quad {}^i\mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1}\mathcal{T} + {}^{i+1}\mathbf{r}(0)$$

En itérant le processus, nous arrivons à la relation :

$${}^i\mathbf{r}(i_s) = \int_0^{i_s} {}^i\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma + \sum_{j=1}^{i-1} -{}^{j+1}\mathcal{T} + \int_0^{l_j} {}^j\mathbf{r}'(\sigma) d\sigma$$

ce qui entraîne :

$$\|{}^i\mathbf{r}(i_s)\|^2 \leq (2i-1) \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \|{}^{j+1}\mathcal{T}\|^2 + \sum_{j=1}^i l_j \int_0^{l_j} \|{}^j\mathbf{r}'(\sigma)\|^2 d\sigma \right\}$$

On en déduit, par intégration sur  $[0, l_i]$ , l'existence de deux constantes strictement positives,  $C_1^i$  et  $C_2^i$ , ne dépendant que de la géométrie de la configuration de référence, et telles que :

$$\|{}^i\mathbf{r}\|_{L^2(0, l_i; \mathbb{R}^3)}^2 \leq C_2^i + C_1^i \sum_{j=1}^i \|{}^j\mathbf{r}'\|_{L^2(0, l_j; \mathbb{R}^3)}^2$$

On obtient alors par sommation :

$$\sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{r}\|_{L^2(0, l_i; \mathbb{R}^3)}^2 \leq C_2' + C_1' \sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{r}'\|_{L^2(0, l_i; \mathbb{R}^3)}^2$$

où  $C_1'$  et  $C_2'$  sont des constantes strictement positives, ne dépendant que de la géométrie de la configuration de référence. On obtient alors le lemme 2.4.6 avec :

$$C_1 = \frac{1}{1+C_1'} \text{ et } C_2 = \frac{C_2'}{1+C_1'}$$

## 2.5 Un cas simplifié : le modèle inextensible

### 2.5.1 Cadre fonctionnel

Nous avons par définition des mesures de déformation :

$${}^i v_k = {}^i \mathbf{r}' \cdot {}^i \mathbf{d}_k.$$

Les cisaillements sont mesurés par  ${}^i v_1$  et  ${}^i v_2$ , l'allongement par  ${}^i v_3 - 1$ .

En introduisant dans la définition de l'espace des configurations admissibles  $\mathcal{K}$ , la contrainte d'*inextensibilité* :

$$(2.28) \quad {}^i \mathbf{r}' = {}^i \mathbf{d}_3$$

on se restreint donc aux déformations sans cisaillement, ni allongement.

Nous définissons l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{H}^{in} = \prod_{i=1}^{nt} H^2(0, l_i; \mathbb{R}^3) \times [H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3)]^3$$

Notre nouvel espace des configurations admissibles est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{in} = \{ & ({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{r}(0) = 0 \text{ et } {}^i \mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1} \mathcal{T} + {}^{i+1} \mathbf{r}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{d}_j(0) = \mathbf{d}_j^0 \text{ } j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{d}_{j_0}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \text{ } {}^i \mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) = \epsilon_i {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1} j_{i-1}}(l_{i-1}) ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \text{ } {}^i \mathbf{d}_j \cdot {}^i \mathbf{d}_k = \delta_j^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \text{ } ({}^i \mathbf{d}_1 \wedge {}^i \mathbf{d}_2) \cdot {}^i \mathbf{d}_3 > 0 ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \text{ } {}^i \mathbf{r}' = {}^i \mathbf{d}_3 \} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une sous-variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}^{in}$ , dont l'espace

tangent au point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  est :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = & \{({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1}\mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1\mathbf{g}_j(0) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1\mathbf{g}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i\mathbf{g}_{o_{j_i}}(0) = \epsilon_i \cdot {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{H}_i \text{ tel que : } {}^i\mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad {}^i\mathbf{p}' = {}^i\mathbf{g}_3\} \end{aligned}$$

### 2.5.2 Formulation variationnelle

Nous particularisons le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  afin de rechercher des solutions des équations d'équilibre (2.6) vérifiant de plus la condition d'inextensibilité (2.28). Nous cherchons donc à résoudre le problème variationnel  $[\mathcal{P}]^{in}$  :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in}$  tel que :  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) & + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0)\} \\ & \cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ & + \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ & \cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{l_i}}(0)\} \end{aligned} \right\} \\ & = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} \, d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, on a posé :

$$(2.29) \quad \mathcal{J}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) \, d^i s$$

ainsi que :

$${}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) = \frac{{}^i\mathbf{E}^i\mathbf{I}}{2} ({}^i u_1^2 + {}^i u_2^2) + {}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I} {}^i u_3^2$$

On remarque que pour tout élément  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  de  $\mathcal{K}^{in}$ , on peut écrire :

$$(2.30) \quad {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) = \frac{({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G})^i\mathbf{I}}{2} \|{}^i\mathbf{r}''\|^2 + \frac{{}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I}}{2} (\|{}^i\mathbf{d}'_1\|^2 + \|{}^i\mathbf{d}'_2\|^2)$$

où  $||.||$  désigne la norme usuelle dans  $\mathbb{R}^3$ .

Grâce à des arguments de régularité de la densité d'énergie, analogues à ceux développés à la section 2.4, et d'après les relations (2.19), (2.20), on peut aussi écrire ce problème sous la forme :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in}$  tel que :  $\forall ({}^1\mathbf{p}, \mathcal{U}_1 \wedge {}^1\mathbf{d}_j, \dots, {}^{nt}\mathbf{p}, \mathcal{U}_{nt} \wedge {}^{nt}\mathbf{d}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) :$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{m} \cdot \mathcal{U}_i' d^i s &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0_{l_i}}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0_{l_i}}(0)\} \end{aligned} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

On pose :

$$(2.31) \quad {}^i\mathbf{F}({}^i s) = \int_s^{l_i} {}^i\mathbf{f}(\sigma) d\sigma + {}^i\mathbf{N}.$$

Nous avons :

$${}^i\mathbf{F}'({}^i s) = -{}^i\mathbf{f}({}^i s)$$

et nous opérons une intégration par parties qui nous permet d'écrire notre problème sous la forme :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in}$  tel que :  $\forall ({}^1\mathbf{p}, \mathcal{U}_1 \wedge {}^1\mathbf{d}_j, \dots, {}^{nt}\mathbf{p}, \mathcal{U}_{nt} \wedge {}^{nt}\mathbf{d}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) :$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \{-{}^i\mathbf{m} - {}^i\mathbf{r}' \wedge {}^i\mathbf{F}\} \cdot \mathcal{U}_i d^i s &+ \sum_{i=1}^{nt} [{}^i\mathbf{m} \cdot \mathcal{U}_i]_0^{l_i} + [{}^i\mathbf{F} \cdot {}^i\mathbf{p}]_0^{l_i} \\ &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0_{l_i}}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0_{l_i}}(0)\} \end{aligned} \right\} = \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

soit encore en utilisant (2.13) :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in}$  tel que :  $\forall ({}^1\mathbf{p}, \mathcal{U}_1 \wedge {}^1\mathbf{d}_j, \dots, {}^{nt}\mathbf{p}, \mathcal{U}_{nt} \wedge {}^{nt}\mathbf{d}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  :

$$\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \{-{}^i\mathbf{m} - {}^i\mathbf{r}' \wedge {}^i\mathbf{F}\} \cdot \mathcal{U}_i d^i s + \sum_{i=1}^{nt} [{}^i\mathbf{F} \cdot {}^i\mathbf{p}]_0^{l_i} = \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt})$$

et on reconnaît la formulation variationnelle des équations d'équilibre (2.6) à condition de faire l'identification :

$$(2.32) \quad {}^i\mathbf{F}({}^i s) = {}^i\mathbf{n}({}^i s)$$

### 2.5.3 Résultat d'existence

Nous disposons du théorème :

**Théorème 2.5.1** *Si les forces extérieures  $\{{}^i\mathbf{f}\}_{i=1,\dots,nt}$  sont indépendantes des variables  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  et appartiennent à l'espace  $\prod_{i=1}^{nt} H^{-1}(0, l_i; \mathbb{R}^3)$ , alors le problème variationnel  $[\mathcal{P}]^{in}$  admet une solution.*

La démonstration du théorème 2.5.1 est analogue à celle du théorème 2.4.2 et nous ne la reprenons pas ici. Nous posons :

$$(2.33) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_0^{in} = & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \frac{({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G})^i\mathbf{I}}{2} \|{}^i\mathbf{r}''\|^2 + \frac{{}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I}}{2} (\|{}^i\mathbf{d}'_1\|^2 + \|{}^i\mathbf{d}'_2\|^2) d^i s \\ & - \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{r} d^i s - \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{r}(l_{nt}) \\ & + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0)\} \\ & \cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

et le problème variationnel  $[\mathcal{P}]^{in}$  s'interprète comme le problème de recherche des extrémums de la fonctionnelle  $\mathcal{J}_0^{in}$  sur  $\mathcal{K}^{in}$ . La démonstration de la coercivité de  $\mathcal{J}_0^{in}$  sur  $\mathcal{K}^{in}$  pour la norme :

$$\|({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)\|_{\mathcal{H}^{in}}^2 = \sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{r}\|_{H^2(0, l_i; \mathbb{R}^3)}^2 + \sum_{j=1}^3 \|{}^i\mathbf{d}_j\|_{H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3)}^2$$



repose sur l'existence de deux constantes  $C$  et  $C'$  strictement positives, ne dépendant que de la géométrie de la configuration de référence et des caractéristiques mécaniques des matériaux, et telles que :

$$(2.34) \quad \sum_{i=1}^{nt} \|\mathbf{r}''\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 \geq C \sum_{i=1}^{nt} \|\mathbf{r}\|_{L^2(0,l_i;\mathbb{R}^3)}^2 - C'.$$

La majoration (2.34) est établie en se servant du lemme 2.4.6, ainsi que de la majoration :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(s)\|^2 &\leq 2 \left\{ \|\mathbf{r}'(0)\|^2 + l_i \int_0^{l_i} \|\mathbf{r}''(\sigma)\|^2 d\sigma \right\} \\ &\leq 2 \left\{ 1 + l_i \int_0^{l_i} \|\mathbf{r}''(\sigma)\|^2 d\sigma \right\} \end{aligned}$$

que l'on obtient grâce à la contrainte (2.28).

## 2.6 Résolution numérique pour le cas inextensible

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle inextensible décrit à la section précédente. Nous devons donc résoudre un problème de minimisation sous contraintes. Nous choisissons de ne pas introduire de multiplicateurs de Lagrange - facteurs d'instabilités numériques en dynamique, par exemple. Ceci requiert des procédures spéciales d'interpolation et d'actualisation à chaque itération, procédures que nous détaillerons par la suite.

### 2.6.1 Approximation par éléments finis

D'après l'expression (2.30), l'énergie de déformation est quadratique **dans les variables de déformation**  $(\mathbf{r}, \mathbf{d}_j)$ . Le problème variationnel  $[\mathcal{P}]^{in}$  est un problème *linéaire*, d'ordre 2 dans les variables  $\{\mathbf{r}\}_{i=1,\dots,nt}$  et d'ordre 1 dans les variables  $\{\mathbf{d}_j\}_{i=1,\dots,nt; j=1,2,3}$ . En conséquence, nous choisissons une interpolation  $P_1$  pour les variables  $\{\mathbf{d}_j\}_{i=1,\dots,nt; j=1,2,3}$  et  $P_3$  pour les variables  $\{\mathbf{r}\}_{i=1,\dots,nt}$ . Plus précisément, on définit un ensemble de partitions *régulières* des  $nt$  poutres de la chaîne :

$$\bigcup_{j=1}^{M'} [a_{j-1}^i, a_j^i] \quad i = 1, \dots, nt$$

où les points  $a_0^i$  et  $a_{M'}^i$  ont pour abscisses respectives 0 et  $l_i$  sur la poutre  $i$ .

Pour chacune de ces partitions, on définit des espaces  $U_{h^1}^i$  et  $U_{h^3}^i$  d'éléments finis par :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^1}^i$  appartiennent à  $P_1([a_{j-1}^i, a_j^i])$  ;

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^1}^i$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}^i$  et  $a_j^i$  ;
- $U_{h^1}^i \subset C^0([0, l_i])$  ;

et :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^3}^i$  appartiennent à  $P_3([a_{j-1}^i, a_j^i])$  ;
- Sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^3}^i$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}^i$  et  $a_j^i$  et celles de leurs dérivées premières en ces points ;
- $U_{h^3}^i \subset C^1([0, l_i])$ .

Nous notons  $\{\mathbf{M}_i\}$  l'ensemble des points  $\{a_j^i\}_{j=1, \dots, M^i}$  et nous définissons les espaces d'approximation  $\mathcal{K}_h^{in}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_h^{in} = \{ \{ {}^i\mathbf{r}^h, \{ {}^i\mathbf{d}_j^h \}_{j=1,2,3} \}_{i=1, \dots, nt} = ({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h) \in \prod_{i=1}^{nt} \{U_{h^3}^i\}^3 \times \{U_{h^1}^i\}^9 \text{ tel que :} \\ {}^1\mathbf{r}^h(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{r}^h(l_i) = {}^{i+1}\mathcal{T} + {}^{i+1}\mathbf{r}^h(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ {}^1\mathbf{d}_j^h(0) = \mathbf{d}_j^0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ {}^1\mathbf{d}_{j_0}^h(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}^h(0) = \epsilon_i \quad {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1, j_{i-1}}^h(l_{i-1}) ; \\ \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2, \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad {}^i\mathbf{d}_j^h(M) \cdot {}^i\mathbf{d}_k^h(M) = \delta_j^k ; \\ \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad ({}^i\mathbf{d}_1^h(M) \wedge {}^i\mathbf{d}_2^h(M)) \cdot {}^i\mathbf{d}_3^h(M) > 0 ; \\ \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad [{}^i\mathbf{r}^h]'(M) = {}^i\mathbf{d}_3^h(M) \} \end{aligned}$$

et  $\bar{\mathbf{H}}_h^{in}$  par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_h^{in}(({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)) = \{ ({}^i\mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h)_{i=1 \dots nt} = (\mathbf{p}^h, \mathcal{U}^h) \in \prod_{i=1}^{nt} \{U_{h^3}^i\}^3 \times \{U_{h^1}^i\}^3 \\ \text{vérifiant les conditions :} \\ {}^1\mathbf{p}^h(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{p}^h(l_i) = {}^{i+1}\mathbf{p}^h(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ \mathcal{U}_1^h(0) = 0 \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ \mathcal{U}_1^h(0) \wedge {}^1\mathbf{d}_{j_0}^h(0) = 0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad \mathcal{U}_i^h(0) \wedge {}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}^h(0) = \epsilon_i \{ \mathcal{U}_{i-1}^h(l_{i-1}) \wedge {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1, j_{i-1}}^h(l_{i-1}) \} \\ \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad [{}^i\mathbf{p}^h]'(M) = \mathcal{U}_i^h(M) \wedge {}^i\mathbf{d}_3^h(M) \} \end{aligned}$$

ainsi que l'espace tangent  $\delta\mathcal{K}_h^{in}(({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h))$ :

$$\delta\mathcal{K}_h^{in}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \{({}^i\mathbf{p}^h, {}^i\mathbf{g}_j^h) \in \prod_{i=1}^{nt} \{U_{h3}^i\}^3 \times \{U_{h1}^i\}^9 \text{ vérifiant :} \\ \forall i \in \{1, \dots, nt\} \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad {}^i\mathbf{g}_j^h(M) = \mathcal{U}_i^h(M) \wedge {}^i\mathbf{d}_j^h(M) \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \}$$

**Remarque :** Il est important de noter que nous choisissons d'imposer toutes les contraintes (inextensibilité, orthonormation) *en chaque nœud du maillage*, nous différenciant en cela de **Le Tallec, Mani, Rochinha** [1992].

Nous écrivons le problème approché  $[\mathcal{P}]_h^{in}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } ({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h) \in \mathcal{K}_h^{in} \text{ tel que : } \forall ({}^i\mathbf{p}^h, {}^i\mathbf{g}_j^h) \in \delta\mathcal{K}_h^{in}(({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)) : \\ & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G}) {}^i\mathbf{I} \quad [{}^i\mathbf{r}^h]'' \cdot [{}^i\mathbf{p}^h]'' + {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \quad ([{}^i\mathbf{d}_1^h]' \cdot [{}^i\mathbf{g}_1^h]' + [{}^i\mathbf{d}_2^h]' \cdot [{}^i\mathbf{g}_2^h]') d^i s \\ & + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}^h(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}^h(0)\} \\ & \cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^i\mathbf{g}_{i-1, k_{i-1}}^h(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^i\mathbf{g}_{i-1, l_{i-1}}^h(l_{i-1})\} \\ & + \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^i\mathbf{d}_{i-1, k_{i-1}}^h(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^i\mathbf{d}_{i-1, l_{i-1}}^h(l_{i-1})\} \\ & \cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{k_i}}^h(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{l_i}}^h(0)\} \end{aligned} \right\} \\ & = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p}^h d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}^h(l_{nt}) \end{aligned}$$

## 2.6.2 Résultats de convergence

Nous commençons par montrer le lemme :

**Lemme 2.6.1** Soit  $\{({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)\}_h$  une suite telle que :

$$\begin{aligned} & \forall h \geq 0, \quad ({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h) \in \mathcal{K}_h^{in} ; \\ & ({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h) \rightharpoonup ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \text{ dans } \mathcal{H}^{in} \text{ faible lorsque } h \text{ tend vers } 0. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2, \forall {}^i s \in [0, l_i] \quad {}^i\mathbf{d}_j({}^i s) \cdot {}^i\mathbf{d}_k({}^i s) = \delta_j^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall {}^i s \in [0, l_i] \quad {}^i\mathbf{r}'({}^i s) = {}^i\mathbf{d}_3({}^i s) \end{aligned}$$

Démonstration :

Soit

$$h_i = \frac{l_i}{M^i - 1}$$

le pas du maillage de la poutre d'indice  $i$ . Soit  ${}^i s \in [0, l_i]$  et soit  $a^i({}^i s)$  le point du maillage de la poutre d'indice  $i$  le plus proche du point d'abscisse  ${}^i s$ , et soit  ${}^i \tilde{s}$  son abscisse. Nous avons :

$$\begin{aligned} [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i s) \cdot {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i s) - [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i \tilde{s}) \cdot {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i \tilde{s}) &= [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i \tilde{s}) \cdot [{}^i \mathbf{d}_3^h({}^i s) - {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i \tilde{s})] \\ &\quad + {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i \tilde{s}) \cdot [[{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i s) - [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i \tilde{s})] \\ &\quad + [{}^i \mathbf{d}_3^h({}^i s) - {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i \tilde{s})] \cdot [[{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i s) - [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i \tilde{s})], \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i s) \cdot {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i s) - [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i \tilde{s}) \cdot {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i \tilde{s}) &= [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i \tilde{s}) \cdot \int_{{}^i \tilde{s}}^{{}^i s} [{}^i \mathbf{d}_3^h]'(\sigma) d\sigma \\ &\quad + {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i \tilde{s}) \cdot \int_{{}^i \tilde{s}}^{{}^i s} [{}^i \mathbf{r}^h]''(\sigma) d\sigma \\ &\quad + \left[ \int_{{}^i \tilde{s}}^{{}^i s} [{}^i \mathbf{d}_3^h]'(\sigma) d\sigma \right] \cdot \left[ \int_{{}^i \tilde{s}}^{{}^i s} [{}^i \mathbf{r}^h]''(\sigma) d\sigma \right]. \end{aligned}$$

En nous servant de l'inégalité de Hölder et de :

$$|{}^i \tilde{s} - {}^i s| \leq h_i,$$

nous en déduisons la majoration :

$$\begin{aligned} |[{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i s) \cdot {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i s) - [{}^i \mathbf{r}^h]'({}^i \tilde{s}) \cdot {}^i \mathbf{d}_3^h({}^i \tilde{s})| &\leq \sqrt{h_i} \{ ||[{}^i \mathbf{d}_3^h]'||_{L^2([0, l_i])} + ||[{}^i \mathbf{r}^h]''||_{L^2([0, l_i])} \} \\ &\quad + h_i ||[{}^i \mathbf{d}_3^h]'||_{L^2([0, l_i])} ||[{}^i \mathbf{r}^h]''||_{L^2([0, l_i])}. \end{aligned}$$

D'une façon analogue, on établit la majoration :

$$\begin{aligned} |{}^i \mathbf{d}_j^h({}^i s) \cdot {}^i \mathbf{d}_k^h({}^i s) - {}^i \mathbf{d}_j^h({}^i \tilde{s}) \cdot {}^i \mathbf{d}_k^h({}^i \tilde{s})| &\leq \sqrt{h_i} \{ ||[{}^i \mathbf{d}_j^h]'||_{L^2([0, l_i])} + ||[{}^i \mathbf{d}_k^h]'||_{L^2([0, l_i])} \} \\ &\quad + h_i ||[{}^i \mathbf{d}_j^h]'||_{L^2([0, l_i])} ||[{}^i \mathbf{d}_k^h]'||_{L^2([0, l_i])}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, la suite  $\{({}^i \mathbf{r}^h, {}^i \mathbf{d}_j^h)\}_h$  converge faiblement dans  $\mathcal{H}^{in}$ . Elle est donc bornée indépendamment de  $h$  dans  $\mathcal{H}^{in}$ . On obtient alors le résultat annoncé en faisant tendre  $h_i$  vers 0 dans les deux majorations précédentes.

Pour tout élément  $({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)$  de  $\mathcal{K}_h^{in}$ , nous pouvons considérer les opérateurs d'interpolation définis par :

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\mathbf{r} \in U_{h^3}^i, \\ \Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\mathbf{r}(s_k) = {}^i\mathbf{r}(s_k) \quad \forall k = 1, \dots, M^i, \\ [\Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\mathbf{r}]'(s_k) = {}^i\mathbf{r}'(s_k) \quad \forall k = 1, \dots, M^i, \\ \\ \Pi_h^{\mathbf{d}} {}^i\mathbf{d}_j \in U_{h^1}^i, \\ \Pi_h^{\mathbf{d}} {}^i\mathbf{d}_j(s_k) = {}^i\mathbf{d}_j(s_k) \quad \forall k = 1, \dots, M^i, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

où  $s_k$  désigne l'abscisse, sur la poutre  $i$ , du point  $a_k^i$ .

Nous avons :

$$\{(\Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\mathbf{r}, \Pi_h^{\mathbf{d}} {}^i\mathbf{d}_j)\}_{i=1, \dots, nt} \in \mathcal{K}_h^{in}$$

et nous disposons de plus (voir par exemple **Ciarlet** [1978]) des résultats de convergence :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|\Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\mathbf{r} - {}^i\mathbf{r}\|_{H^2(0, l_i, \mathbb{R}^3)} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|\Pi_h^{\mathbf{d}} {}^i\mathbf{d}_j - {}^i\mathbf{d}_j\|_{H^1(0, l_i, \mathbb{R}^3)} &= 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors démontrer le théorème :

**Théorème 2.6.1** *Tout minimum isolé de la fonctionnelle  $\mathcal{J}_0^{in}$  sur  $\mathcal{K}^{in}$  est la limite forte dans  $\mathcal{H}^{in}$  d'une suite de solutions locales du problème approché  $[\mathcal{P}]_h^{in}$ .*

Démonstration :

La démonstration du théorème 2.6.1 repose sur des arguments classiques de compacité. Nous nous contentons d'en donner les principales étapes et les points spécifiques à notre problème. Le lecteur est renvoyé à **Le Tallec, Mani, Rochinha** [1992] pour plus de détails.

Nous remarquons d'abord que la fonctionnelle  $\mathcal{J}_0^{in}$  est *différentiable* donc *continue* sur  $\mathcal{H}^{in}$ . La démonstration s'effectue alors en cinq étapes.

### • Interpolation du minimum

Soit  $({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j)$  un minimum isolé de  $\mathcal{J}_0^{in}$  sur  $\mathcal{K}^{in}$ , et soit  $(\Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\bar{\mathbf{r}}, \Pi_h^{\mathbf{d}} {}^i\bar{\mathbf{d}}_j)$  son interpolateur, défini par (2.35). Alors il existe une boule fermée  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{H}^{in}$ , centrée sur  $({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j)$  et telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0^{in}({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j) &< \mathcal{J}_0^{in}({}^i\bar{\mathbf{p}}, {}^i\bar{\mathbf{g}}_j) & \forall ({}^i\bar{\mathbf{p}}, {}^i\bar{\mathbf{g}}_j) \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}^{in}, ({}^i\bar{\mathbf{p}}, {}^i\bar{\mathbf{g}}_j) \neq ({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j), \\ (\Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\bar{\mathbf{r}}, \Pi_h^{\mathbf{d}} {}^i\bar{\mathbf{d}}_j) &\in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}_h^{in}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{J}_0^{in}(\Pi_h^{\mathbf{r}} {}^i\bar{\mathbf{r}}, \Pi_h^{\mathbf{d}} {}^i\bar{\mathbf{d}}_j) &= \mathcal{J}_0^{in}({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j). \end{aligned}$$

### • Suite minimisante

En se servant de la **continuité** de  $\mathcal{J}_0^{in}$ , on démontre l'existence d'une suite :

$$\{({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)\}_h$$

de solutions du problème  $[\mathcal{P}]_h^{in}$ , dont tous les éléments appartiennent à la boule fermée  $\mathcal{B}$ . On en déduit l'existence pour cette suite, de suites extraites faiblement convergentes dans  $\mathcal{H}^{in}$ . Soit  $({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)$  la limite faible de l'une de ces suites extraites. En se servant du lemme 2.6.1, on peut alors établir :

$$({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*) \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}^{in}.$$

### • Caractérisation

Nous nous servons du fait que la fonctionnelle  $\mathcal{J}_0^{in}$  est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement, ainsi que de la définition (2.35) des opérateurs d'interpolation pour établir que la limite faible  $({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)$  d'une suite extraite faiblement convergente de la suite  $\{({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)\}_h$  construite à l'étape précédente, vérifie :

$$({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*) = ({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j)$$

et que de plus :

$$(2.36) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{J}_0^{in}({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h) = \mathcal{J}_0^{in}({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j).$$

### • Convergence forte

Les fonctionnelles :

$$\begin{aligned} ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) &\rightarrow \sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{r}''\|_{L^2(0,t_i; \mathbb{R}^3)}, \\ ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) &\rightarrow \sum_{i=1}^{nt} \|{}^i\mathbf{d}_j'\|_{L^2(0,t_i; \mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

sont faiblement semi-continues inférieurement sur  $\mathcal{H}^{in}$ . D'après la définition (2.33) de  $\mathcal{J}_0^{in}$ , et d'après (2.36), on en déduit :

$$\begin{aligned} \{[{}^i\mathbf{d}_j^h]'\}_{i=1,\dots,nt} &\rightarrow \{{}^i\bar{\mathbf{d}}_j'\}_{i=1,\dots,nt} \quad \text{dans } \prod_{i=1}^{nt} L^2(0, l_i; \mathbb{R}^3) \text{ fort, } h \rightarrow 0, \\ \{[{}^i\mathbf{r}^h]''\}_{i=1,\dots,nt} &\rightarrow \{{}^i\bar{\mathbf{r}}''\}_{i=1,\dots,nt} \quad \text{dans } \prod_{i=1}^{nt} L^2(0, l_i; \mathbb{R}^3) \text{ fort, } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par application du théorème de Rellich-Kondrachov (**Brézis** [1988]), ainsi que du lemme (**Ciarlet** [1988]) :

**Lemme 2.6.2** *Soient  $V$  et  $W$  deux espaces de Banach, et soit  $A$  un opérateur linéaire compact de  $V$  vers  $W$ . Alors si la suite  $\{u_n\}$  converge vers  $u$  dans  $V$  faible, la suite  $\{A(u_n)\}$  converge vers  $A(u)$  dans  $W$  fort,*

on en déduit :

$$\begin{aligned} \{{}^i\mathbf{d}_j^h\}_{i=1,\dots,nt} &\rightarrow \{{}^i\bar{\mathbf{d}}_j\}_{i=1,\dots,nt} \quad \text{dans } \prod_{i=1}^{nt} H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3) \text{ fort, } h \rightarrow 0, \\ \{{}^i\mathbf{r}^h\}_{i=1,\dots,nt} &\rightarrow \{{}^i\bar{\mathbf{r}}\}_{i=1,\dots,nt} \quad \text{dans } \prod_{i=1}^{nt} H^2(0, l_i; \mathbb{R}^3) \text{ fort, } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

et donc :

$$({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h) \rightarrow ({}^i\bar{\mathbf{r}}, {}^i\bar{\mathbf{d}}_j) \quad \text{dans } \mathcal{H}^{in} \text{ fort, } h \rightarrow 0.$$

### • Solutions locales

D'après la convergence forte prouvée à l'étape précédente, nous pouvons en déduire que, pour  $h$  suffisamment petit, l'élément  $({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)$  se trouvera dans l'intérieur de  $\mathcal{B}$ . Puisque par construction  $\mathcal{J}_0^{in}$  atteint en  $({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)$  son minimum sur  $\mathcal{K}_h^{in} \cap \mathcal{B}$ ,  $({}^i\mathbf{r}^h, {}^i\mathbf{d}_j^h)$  est une solution locale du problème approché  $[\mathcal{P}]_h^{in}$ , mis sous forme du problème de minimisation de  $\mathcal{J}_0^{in}$  sur  $\mathcal{K}_h^{in}$ .

**Remarque :** Le résultat de convergence précédent reste valable si l'on remplace, dans la définition de  $\mathcal{K}_h^{in}$ , les espaces  $U_{h1}^i$  par les espaces  $U_{h2}^i$  définis par :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h2}^i$  appartiennent à  $P_2([a_{j-1}^i, a_j^i])$  ;
- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h2}^i$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}^i$ ,  $a_j^i$  et au point milieu de l'intervalle ;
- $U_{h2}^i \subset C^0([0, l_i])$  ;

### 2.6.3 Linéarisation de la formulation variationnelle

Nous revenons, dans cette section, à la formulation variationnelle du problème continu. Nous devons garder à l'esprit que nous ne cherchons pas un point d'*annulation* du gradient de  $\mathcal{J}_0$  sur  $\mathcal{K}^{in}$ , mais un point  $({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)$  de  $\mathcal{K}^{in}$  tel que le gradient de  $\mathcal{J}_0$  en ce point soit **orthogonal** à l'espace tangent  $\delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}^*, {}^i\mathbf{d}_j^*)$  *en ce point*.

Soit  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  un point de  $\mathcal{K}^{in}$  et soit l'espace fonctionnel :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = & \{({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U})_{i=1\dots nt} = (\mathbf{p}, \mathcal{U}) \in \prod_{i=1}^{nt} H^2(0, l_i; \mathbb{R}^3) \times H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3) \\ & \text{vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1}\mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & \mathcal{U}_1(0) = 0 \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & \mathcal{U}_1(0) \wedge {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \mathcal{U}_i(0) \wedge {}^i\mathbf{d}_{j_i}(0) = \epsilon_i \{ \mathcal{U}_{i-1}(l_{i-1}) \wedge {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1, j_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} {}^i\mathbf{p}' = \mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_3 \} \end{aligned}$$

L'espace tangent  $\delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  à  $\mathcal{K}^{in}$  au point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  est paramétré par un vecteur arbitraire  $(\mathbf{p}, \mathcal{U})$  appartenant à  $\bar{\mathbf{H}}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$ , par la formule :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = & \{({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant :} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} {}^i\mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_j \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \} \end{aligned}$$

En prenant en compte cette paramétrisation particulière de l'espace tangent, la condition d'orthogonalité du gradient de  $\mathcal{J}_0$  au point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  à l'espace tangent



$\delta\mathcal{K}^{in}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \forall (\mathbf{p}, \mathcal{U}) \in \bar{\mathbf{H}}^{in}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) \times \bar{\mathbf{H}}^{in}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) : \\
 & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G}) {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{r}'' \cdot {}^i\mathbf{p}'' d^i s + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{d}_1' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_1]' d^i s \\
 & + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{d}_2' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_2]' d^i s \\
 & + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) [\mathcal{U}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}](l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) [\mathcal{U}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}](l_{i-1}) \} \\ & + \{ \cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}](0) + \sin({}^0\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}](0) \} \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt})
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Notons que le second membre :

$$\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt})
 \tag{2.38}$$

de l'équation (2.37) s'écrit également :

$$\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{r}'] d^i s.
 \tag{2.39}$$

où  ${}^i\mathbf{F}$  est défini par (2.31) et (2.32). Dans la suite, nous ferons référence à l'équation (2.38) sous le nom de *forme symétrique* du second membre et à l'équation (2.39) sous le nom de *forme non symétrique* du second membre.

Nous procédons par *linéarisation* de la condition d'orthogonalité (2.37). Le principe de cette linéarisation est le suivant : nous remplaçons symboliquement, dans (2.37), la variable

$$({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$$

appartenant à  $\mathcal{K}^{in}$ , par :

$$([{}^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k) + ({}^i\hat{\mathbf{p}}, {}^i\hat{\mathbf{g}}_j)$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} & ([{}^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k) \in \mathcal{K}^{in} \\ & ({}^i\hat{\mathbf{p}}, {}^i\hat{\mathbf{g}}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}(([]^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k)) \end{aligned} \right.$$

Le terme d'énergie élastique

$$\begin{aligned} \mathbf{E}((^i\mathbf{r}, ^i\mathbf{d}_j), (^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = \\ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (^i\mathbf{E} - ^i\mathbf{G}) ^i\mathbf{I} \cdot ^i\mathbf{r}'' \cdot ^i\mathbf{p}'' d^i s + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ^i\mathbf{G} ^i\mathbf{I} \cdot ^i\mathbf{d}_1' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge ^i\mathbf{d}_1]' d^i s \\ + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ^i\mathbf{G} ^i\mathbf{I} \cdot ^i\mathbf{d}_2' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge ^i\mathbf{d}_2]' d^i s \end{aligned}$$

fournit alors les deux fonctionnelles :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = \\ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (^i\mathbf{E} - ^i\mathbf{G}) ^i\mathbf{I} \cdot [^i\mathbf{r}]_k'' \cdot ^i\mathbf{p}'' d^i s + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ^i\mathbf{G} ^i\mathbf{I} \cdot [[^i\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_1]_k]' d^i s \\ + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ^i\mathbf{G} ^i\mathbf{I} \cdot [[^i\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_2]_k]' d^i s \\ \mathbf{E}_2^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), (^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = \\ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (^i\mathbf{E} - ^i\mathbf{G}) ^i\mathbf{I} \cdot ^i\hat{\mathbf{p}}'' \cdot ^i\mathbf{p}'' d^i s \\ + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ^i\mathbf{G} ^i\mathbf{I} \cdot ([\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [^i\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_1]_k]' + [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [^i\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_2]_k]') d^i s \\ + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} (^i\mathbf{E} - ^i\mathbf{G}) ^i\mathbf{I} \cdot [^i\mathbf{r}]_k'' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge ^i\hat{\mathbf{p}}']' d^i s \\ + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ^i\mathbf{G} ^i\mathbf{I} \cdot ([[[^i\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge (\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_1]_k)])' + [[^i\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge (\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_2]_k)])' d^i s \end{aligned}$$

Le terme de moment ponctuel :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}((^i\mathbf{r}, ^i\mathbf{d}_j), (^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = \\ \sum_{i=1}^{nt-1} \kappa_i \left\{ \begin{aligned} &\{\cos(^0\theta_{i+1}) ^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}(0) + \sin(^0\theta_{i+1}) ^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}(0)\} \\ &\cdot \{\cos(^l\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge ^i\mathbf{d}_{l_{k_i}}](l_i) + \sin(^l\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge ^i\mathbf{d}_{l_{l_i}}](l_i)\} \\ &+ \{\cos(^l\theta_i) ^i\mathbf{d}_{l_{k_i}}(l_i) + \sin(^l\theta_i) ^i\mathbf{d}_{l_{l_i}}(l_i)\} \\ &\cdot \{\cos(^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge ^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}] (0) + \sin(^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge ^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}] (0)\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

fournit les deux fonctionnelles :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = & \sum_{i=1}^{nt-1} \kappa_i \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos(^0\theta_{i+1}) [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k(0) + \sin(^0\theta_{i+1}) [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k(0) \} \\ & \cdot \{ \cos(^l\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,k}}]_k](l_i) + \sin(^l\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,l_i}}]_k](l_i) \} \\ & + \{ \cos(^l\theta_i) [^i\mathbf{d}^l k_i]_k(l_i) + \sin(^l\theta_i) [^i\mathbf{d}_{l_{i,l_i}}]_k(l_i) \} \\ & \cdot \{ \cos(^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k](0) + \sin(^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k](0) \} \end{aligned} \right\} \\
\mathbf{M}_2^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), (^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = & \sum_{i=1}^{nt-1} \kappa_i \left\{ \begin{aligned} & \{ \mathcal{U}_i(l_i) - \mathcal{U}_{i+1}(0) \} \\ & \cdot \{ \cos(^0\theta_{i+1}) \cos(^l\theta_i) [[\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k](0) \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,k}}]_k(l_i) + [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,k}}]_k](l_i)] \\ & + \cos(^0\theta_{i+1}) \sin(^l\theta_i) [[\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k](0) \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,l_i}}]_k(l_i) + [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,l_i}}]_k](l_i)] \\ & + \sin(^0\theta_{i+1}) \cos(^l\theta_i) [[\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k](0) \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,k}}]_k(l_i) + [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,k}}]_k](l_i)] \\ & + \sin(^0\theta_{i+1}) \sin(^l\theta_i) [[\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k](0) \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,l_i}}]_k(l_i) + [^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [^i\mathbf{d}_{l_{i,l_i}}]_k](l_i)] \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Sous sa forme *non symétrique*, le second membre :

$$\mathbf{F}((^i\mathbf{r}, ^i\mathbf{d}_j), (^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{r}'] d^i s$$

fournit les deux opérateurs :

$$\mathbf{F}_1^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}]'_k] d^i s$$

et :

$$\mathbf{F}_2^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), (^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge (\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}]'_k)] d^i s.$$

Nous introduisons enfin les opérateurs :

$$\begin{aligned}
(2.40) \quad \mathbf{R}^k &= \mathbf{E}_1^k + \mathbf{M}_1^k - \mathbf{F}_1^k \\
\mathbf{H}^k &= \mathbf{E}_2^k + \mathbf{M}_2^k - \mathbf{F}_2^k
\end{aligned}$$

Avec ces notations, la version linéarisée de l'équation (2.37) est :

$$(2.41) \quad \boxed{\mathbf{H}^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), (^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) + \mathbf{R}^k((^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = 0}$$

**Remarque :** L'équation d'orthogonalité (2.37) utilise une paramétrisation particulière de l'espace tangent *qui dépend du point de tangence considéré*. La linéarisation de (2.37) fait donc intervenir également la dérivée de la paramétrisation de l'espace tangent par rapport au point de tangence, ce qui détruit la symétrie de l'opérateur linéarisé  $\mathbf{H}^k$ , sauf si le cofacteur de cette dérivée est nul. On montre cependant que la partie antisymétrique :

$$\mathbf{A}^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), ({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{H}^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), ({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) - \mathbf{H}^k(({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i), ({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) \}$$

de l'opérateur  $\mathbf{H}^k$  vaut :

$$(2.42) \quad \mathbf{A}^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), ({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{i_i} [{}^i\mathbf{m}'_k + {}^i\mathbf{r}'_k \wedge {}^i\mathbf{F}] \cdot [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge \mathcal{U}_i] d^i s$$

où  ${}^i\mathbf{m}_k$  est la densité de moment intérieur associée à la configuration  $([{}^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k)$ .

L'opérateur  $\mathbf{A}^k$  est donc nul lorsque  $([{}^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k)$  est une configuration d'équilibre du système. En un tel point, l'opérateur  $\mathbf{H}^k$  correspond à la raideur du système, qui est symétrique par construction, le problème étant conservatif.

## 2.6.4 Résolution du problème approché

Notre algorithme de résolution s'écrit de la façon suivante :

### 1. Initialisation

On choisit  $([{}^i\mathbf{r}^h]_0, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_0)$  dans  $\mathcal{K}_h^{in}$ .

### 2. Résolution du problème

$$(2.43) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } ({}^i\hat{\mathbf{p}}^h, \hat{\mathcal{U}}_i^h) \in \bar{\mathbf{H}}_h^{in}([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k) \text{ tel que} \\ & \forall ({}^i\mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h) \in \bar{\mathbf{H}}_h^{in}([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k) \\ & \mathbf{H}^k(({}^i\mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h), ({}^i\hat{\mathbf{p}}^h, \hat{\mathcal{U}}_i^h)) = -\mathbf{R}^k(({}^i\mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h)) \end{aligned}$$

### 3. Test d'arrêt

- Le test d'arrêt est satisfait : **Fin**.
- Le test d'arrêt n'est pas satisfait : **Actualisation** de  $([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k)$  à l'aide de  $({}^i\hat{\mathbf{p}}^h, \hat{\mathcal{U}}_i^h)$ ,  $k \rightarrow k + 1$  et retour à l'étape 2.

**Remarque :** L'intérêt de l'utilisation de (2.41) à l'étape 2 est de pouvoir prendre en compte la courbure de l'espace tangent dans le calcul de la direction de descente, ce qui conduit, d'après nos observations numériques, à un algorithme plus robuste.

Nous allons maintenant détailler les étapes de cet algorithme.

### • Interpolation

On note  ${}^i s_j$  et  ${}^i s_{j+1}$  les abscisses respectives, sur la poutre  $i$ , des points  $a_j^i$  et  $a_{j+1}^i$  et soit  $\lambda$  la coordonnée barycentrique attachée à  $a_{j+1}^i$  sur le segment  $[a_j^i, a_{j+1}^i]$  :

$$\lambda = \frac{{}^i s - {}^i s_j}{{}^i s_{j+1} - {}^i s_j}.$$

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} [{}^i \mathbf{r}^h]_k &= \Pi_h^{\mathbf{r}} [{}^i \mathbf{r}]_k \\ &= [{}^i \mathbf{r}]_k ({}^i s_j) (1 + 2\lambda) (1 - \lambda)^2 + [{}^i \mathbf{r}]_k ({}^i s_{j+1}) (3 - 2\lambda) \lambda^2 \\ &\quad + [{}^i \mathbf{r}]'_k ({}^i s_j) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) \lambda (1 - \lambda)^2 - [{}^i \mathbf{r}]'_k ({}^i s_{j+1}) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) (1 - \lambda) \lambda^2 \\ [{}^i \mathbf{d}_j^h]_k &= \Pi_h^{\mathbf{d}} [{}^i \mathbf{d}_j]_k \\ &= [{}^i \mathbf{d}_j]_k ({}^i s_j) (1 - \lambda) + [{}^i \mathbf{d}_j]_k ({}^i s_{j+1}) \lambda \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{p}^h &= {}^i \mathbf{p} ({}^i s_j) (1 + 2\lambda) (1 - \lambda)^2 + {}^i \mathbf{p} ({}^i s_{j+1}) (3 - 2\lambda) \lambda^2 \\ &\quad + (\mathcal{U}_i \wedge [{}^i \mathbf{r}]'_k) ({}^i s_j) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) \lambda (1 - \lambda)^2 - (\mathcal{U}_i \wedge [{}^i \mathbf{r}]'_k) ({}^i s_{j+1}) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) (1 - \lambda) \lambda^2 \\ {}^i \mathbf{g}_j^h &= \Pi_h^{\mathbf{d}} (\mathcal{U}_i) \wedge \Pi_h^{\mathbf{d}} ([{}^i \mathbf{d}_j]_k) \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} {}^i \hat{\mathbf{p}}^h &= {}^i \hat{\mathbf{p}} ({}^i s_j) (1 + 2\lambda) (1 - \lambda)^2 + {}^i \hat{\mathbf{p}} ({}^i s_{j+1}) (3 - 2\lambda) \lambda^2 \\ &\quad + (\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i \mathbf{r}]'_k) ({}^i s_j) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) \lambda (1 - \lambda)^2 - (\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i \mathbf{r}]'_k) ({}^i s_{j+1}) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) (1 - \lambda) \lambda^2 \\ {}^i \hat{\mathbf{g}}_j^h &= \Pi_h^{\mathbf{d}} (\hat{\mathcal{U}}_i) \wedge \Pi_h^{\mathbf{d}} ([{}^i \mathbf{d}_j]_k) \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

**Commentaire :** Si les interpolations des variables  $[{}^i \mathbf{r}]_k$  et  $[{}^i \mathbf{d}_\alpha]_k$  sont des interpolations  $P_3$  et  $P_1$  classiques, celles des variables  ${}^i \mathbf{p}$ ,  ${}^i \mathbf{g}$ ,  ${}^i \hat{\mathbf{p}}$  et  ${}^i \hat{\mathbf{p}}$  sont modifiées de façon à tenir compte des contraintes *ponctuelles* qui interviennent dans la définition de l'espace des configurations admissibles.

### • Initialisation

La démarche que nous avons adoptée est la suivante : pour chaque poutre de la chaîne, nous choisissons une configuration géométrique raisonnable, caractérisée par des paramètres de forme que nous détaillerons plus loin et nous *imposons a priori* les conditions aux limites ponctuelles (encastrement, conditions de raccord).

Pour construire la configuration géométrique initiale, nous nous sommes inspirés du cas d'une poutre en flexion donné par **Le Tallec, Mani, Rochinha** [1992] (figure (2.4)) pour lequel la configuration initiale est *circulaire* et située *dans le plan*

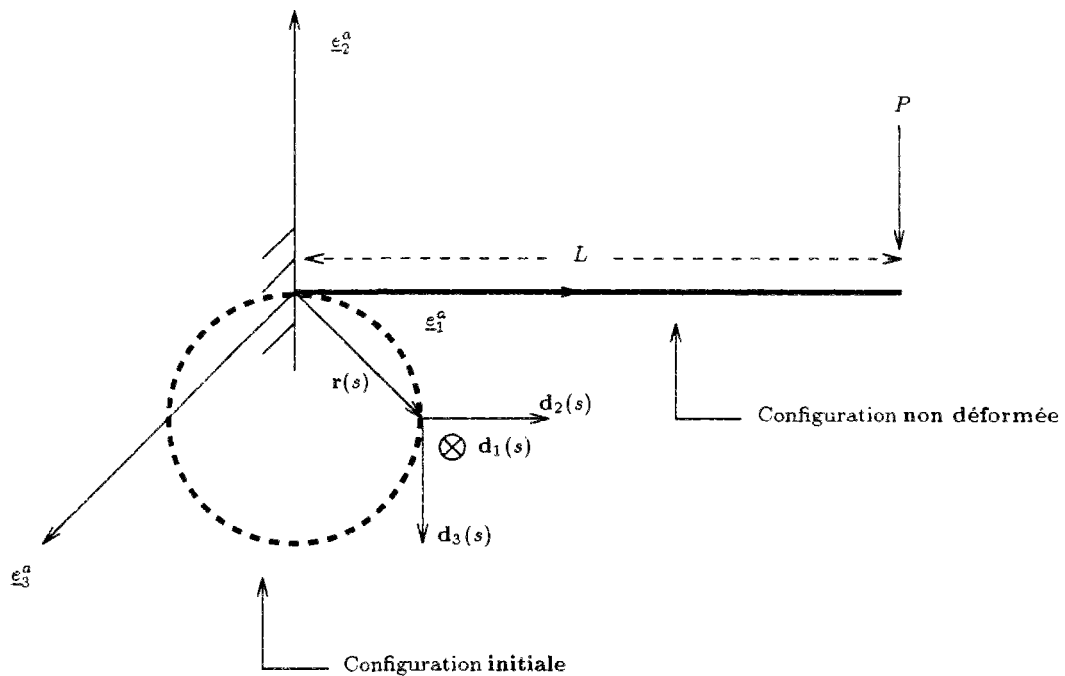


FIG. 2.4 - Configuration initiale

déterminé par la structure et la résultante des efforts extérieurs. De façon explicite, la configuration initiale est donnée, en composantes dans le repère absolu  $(O, \underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$ ,

par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(s) = \frac{L}{2\pi} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_1^a + (-1 + \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right)) \underline{e}_2^a \right. \\ \\ \mathbf{d}_1(s) = -\underline{e}_3^a \\ \\ \mathbf{d}_2(s) = \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_1^a + \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_2^a \\ \\ \mathbf{d}_3(s) = \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_1^a - \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_2^a \end{array} \right.$$

Nous avons développé cette idée en introduisant le paramètre de forme  $\alpha$ , **réel non nul**, qui permet de “déroiler” la configuration initiale précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(s) = \frac{L}{2\pi\alpha} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_1^a + (-1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right)) \underline{e}_2^a \right\} \\ \\ \mathbf{d}_1(s) = -\underline{e}_3^a \\ \\ \mathbf{d}_2(s) = \sin\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_1^a + \cos\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_2^a \\ \\ \mathbf{d}_3(s) = \cos\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_1^a - \sin\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_2^a \end{array} \right.$$

puis le paramètre de forme  $\beta$  qui permet de traduire la torsion d’une configuration rectiligne (qui correspond au cas limite où  $\alpha$  est nul) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(s) = s \underline{e}_1^a \\ \\ \mathbf{d}_1(s) = -\sin\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right) \underline{e}_2^a - \cos\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right) \underline{e}_3^a \\ \\ \mathbf{d}_2(s) = \cos\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right) \underline{e}_2^a - \sin\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right) \underline{e}_3^a \\ \\ \mathbf{d}_3(s) = \underline{e}_1^a \end{array} \right.$$

Pour généraliser de façon plus complète cette initialisation, nous avons introduit la notion de *plan de charge* de la poutre  $i$ . Ce plan est engendré par deux vecteurs non

colinéaires  $a_i$  et  $b_i$  :  $a_i$  est un vecteur directeur normé de la poutre  $i$  en configuration de référence et  $b_i$  est un vecteur directeur normé d'une approximation raisonnable de la direction de la résultante des efforts extérieurs qui s'exercent sur la poutre  $i$ .

Dans un cas simple, tel que celui de la figure (2.4), le plan de charge est le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ , le vecteur  $\underline{e}_1^a$  étant un vecteur directeur de la poutre encastrée en configuration de référence et le vecteur  $\underline{e}_2^a$  dirigeant l'effort ponctuel appliqué.

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} b'_i &= b_i, \\ c_i &= a_i \wedge b'_i, \end{aligned}$$

si le produit scalaire  $(a_i ; b_i)$  des vecteurs  $a_i$  et  $b_i$  est nul et :

$$b'_i = \frac{a_i - \frac{(a_i ; a_i)}{(a_i ; b_i)} b_i}{\left\| a_i - \frac{(a_i ; a_i)}{(a_i ; b_i)} b_i \right\|}$$

$$c_i = a_i \wedge b'_i,$$

dans le cas contraire. Soit  $E_{i-1}$  le point extrémité de la poutre  $i-1$  en configuration *initiale* et soit le vecteur :

$$\mathbf{T}_{i-1} = \overrightarrow{OE_{i-1}}.$$

Nous choisissons alors la configuration initiale suivante de la poutre  $i$  :

$$\begin{aligned} [{}^i\mathbf{r}]_0({}^is) &= \mathbf{T}_{i-1} + \frac{l_i}{2\pi\alpha_i} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^is}{l_i}\right) a_i + (-1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^is}{l_i}\right)) b'_i \right\} \\ [{}^i\mathbf{d}_1]_0({}^is) &= -c_i \\ (2.44) \quad [{}^i\mathbf{d}_2]_0({}^is) &= \sin\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^is}{l_i}\right) a_i + \cos\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^is}{l_i}\right) b'_i \\ [{}^i\mathbf{d}_3]_0({}^is) &= \cos\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^is}{l_i}\right) a_i - \sin\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^is}{l_i}\right) b'_i \end{aligned}$$



lorsque le réel  $\alpha_i$  n'est pas nul et :

$$\begin{aligned}
 [{}^i\mathbf{r}]_0({}^is) &= \mathbf{T}_{i-1} + {}^is a_i \\
 [{}^i\mathbf{d}_1]_0({}^is) &= -\sin\left(\frac{2\pi\beta_i {}^is}{l_i}\right)b'_i - \cos\left(\frac{2\pi\beta_i {}^is}{l_i}\right)c_i \\
 [{}^i\mathbf{d}_2]_0({}^is) &= \cos\left(\frac{2\pi\beta_i {}^is}{l_i}\right)b'_i - \sin\left(\frac{2\pi\beta_i {}^is}{l_i}\right)c_i \\
 [{}^i\mathbf{d}_3]_0({}^is) &= a_i
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

dans le cas contraire.

La configuration initiale approchée  $([{}^i\mathbf{r}^h]_0, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_0)$  est obtenue à partir des valeurs des configurations initiales (2.44) et (2.45) aux nœuds du maillage et par imposition des conditions aux limites et de jonction.

## • Résolution

L'interpolation du problème (2.43) nous amène à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{K} \end{array} \right]_k \cdot \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathcal{U}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{R}_k \end{array} \right]
 \tag{2.46}$$

dont la matrice et le second membre dépendent des variables  $([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k)$  (ce qui est rappelé par l'indice  $_k$ ) et dont les inconnues sont les valeurs et les dérivées des variables  $({}^i\hat{\mathbf{p}}, {}^i\hat{\mathcal{U}})$  aux nœuds du maillage. La matrice de ce système est non symétrique. Cependant, la norme de sa partie antisymétrique décroît avec la norme du vecteur  $[\mathbf{R}_k]$ , comme on pouvait le prévoir grâce à l'équation (2.42). Nous inversons cette matrice par une méthode de Gauss.

Les conditions aux limites et de raccord sont prises en compte suivant la méthodologie Modulef.

### • Actualisation

En chaque nœud  $M$  du maillage de la poutre  $i$ , nous opérons l'actualisation :

$$[{}^i\mathbf{r}^h]_{k+1}(M) = [{}^i\mathbf{r}^h]_k(M) + \lambda_k {}^i\hat{\mathbf{p}}(M).$$

L'actualisation des variables  $\{[{}^i\mathbf{d}_j^h]_k\}$  ainsi que des dérivées  $\{[{}^i(\mathbf{r}')^h]_k\}$  se fait selon un processus particulier (voir par exemple **Hughes & Winget** [1980]) :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c|c} {}^i\mathbf{d}_1^h & {}^i\mathbf{d}_2^h & [{}^i\mathbf{r}^h]' \end{array} \right]_{k+1} (M) \\ &= \mathcal{M}(\lambda_k [\hat{\mathcal{U}}_i(M)]_1, \lambda_k [\hat{\mathcal{U}}_i(M)]_2, \lambda_k [\hat{\mathcal{U}}_i(M)]_3) \cdot \left[ \begin{array}{c|c|c} {}^i\mathbf{d}_1^h & {}^i\mathbf{d}_2^h & [{}^i\mathbf{r}^h]' \end{array} \right]_k (M) \end{aligned}$$

où :

$$(2.47) \quad \mathcal{M}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3) = \text{Id} + \frac{1}{\mathcal{D}} \left[ \tilde{\mathcal{U}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{U}}^2 \right]$$

avec :

$$\mathcal{D} = 1 + \frac{(\mathcal{U}_1)^2 + (\mathcal{U}_2)^2 + (\mathcal{U}_3)^2}{4}$$

et :

$$\tilde{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{U}_3 & \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 & 0 & -\mathcal{U}_1 \\ -\mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Remarque 1 :** Dans ce qui précède, le scalaire  $\lambda_k$  est choisi (par recherche linéaire sur  $[0;1]$ ) de façon à minimiser la norme du vecteur  $[R_{k+1}]$ .

**Remarque 2 :** Dans l'équation (2.47), les quantités  $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3)$  apparaissent comme les paramètres de Rodrigues d'une matrice de rotation. Il s'agit d'un paramétrage *algébrique* des rotations finies. On en trouvera d'autres exemples dans l'annexe A.

### • Test d'arrêt

Nous choisissons un test d'arrêt sur la norme du second membre du système (2.46), soit :

$$||[R_k]|| \leq \epsilon$$

## 2.7 Tests numériques

### 2.7.1 Cas sans raccord

#### Cas 1 : effort ponctuel

Nous testons d'abord notre algorithme sur un cas sans raccord, celui d'une seule poutre encastrée, soumise à un effort ponctuel en son extrémité libre. Nous avons adapté notre algorithme à ce cas en annulant les termes  $\mathbf{M}_1^k$  et  $\mathbf{M}_2^k$  dans l'expression des opérateurs  $\mathbf{R}^k$  et  $\mathbf{H}^k$  (équation (2.40)).

On suppose que la poutre est chargée dans son plan et qu'elle ne travaille donc qu'en flexion pure (Fig. 2.5).

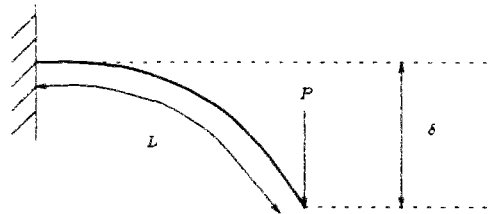


FIG. 2.5 - Poutre encastrée en flexion : effort ponctuel

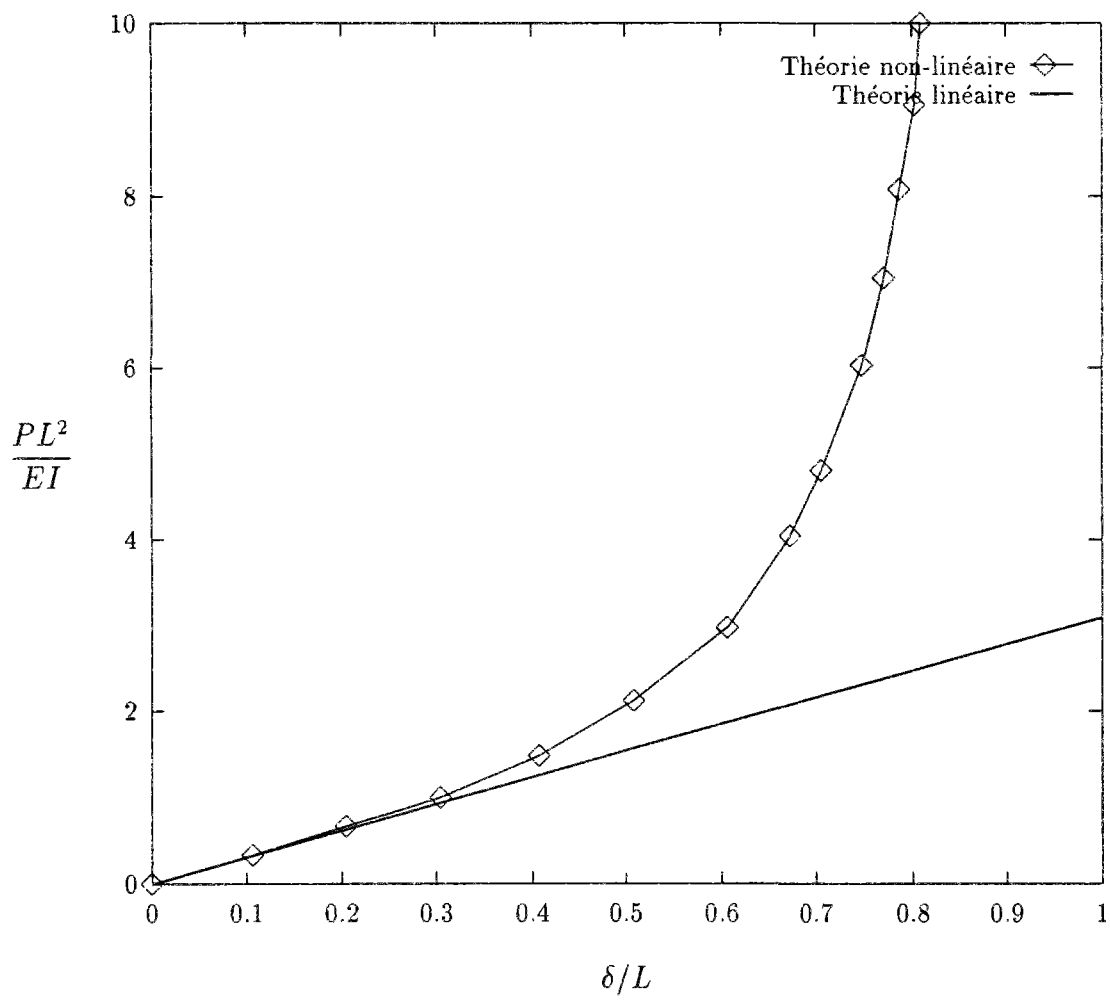
La poutre est caractérisée par son module d'Young  $\mathbf{E}$ , son moment d'inertie à la flexion  $\mathbf{I}$  et sa longueur  $L$ . On dispose d'une solution exacte (**Bisshopp & Drucker** [1945]). Nous représentons ici cette solution ainsi que l'écart avec la théorie linéaire classique (figure 2.6).

Nous testons notre algorithme avec les paramètres suivants :

$$\mathbf{EI} = 1000 \, N \times m^2$$

$$L = 10 \, m$$

Nous prenons  $\beta = 0.$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  et nous travaillons avec 30 éléments de poutre. Les

FIG. 2.6 - *Solution exacte*

résultats obtenus sont les suivants :

$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{\delta}{L}$ calculé	$\frac{\delta}{L}$ analytique	Erreur relative	Nombre d'itérations	$\alpha$
1.	0.3017	0.306	1.4%	21	0.1
2.	0.4935	0.495	0.3%	15	0.15
3.	0.6034	0.6037	0.04%	19	0.15
4.	0.6702	0.6704	0.03%	16	0.2
5.	0.7141	0.7132	0.1%	21	0.2
6.	0.7450	0.7461	0.15%	26	0.25
7.	0.7679	0.7685	0.07%	23	0.25
8.	0.7856	0.7853	0.04%	24	0.25
9.	0.7997	0.8	0.04%	26	0.25
10.	0.8114	0.810	0.17%	28	0.25

Nous avons également examiné l'effet d'un raffinement du maillage :

Nombre d'éléments	$\frac{\delta}{L}$ calculé	Nombre d'itérations
10	0.8175	9
20	0.8123	17
30	0.8113	28
50	0.8109	56

ceci pour  $\frac{PL^2}{EI} = 10, \alpha = 0.25, \beta = 0$ .

### Cas 2 : moment ponctuel

En dehors des moments aux articulations construits à la section 2.3.2, nous n'avons pas considéré le cas des structures chargées à l'aide de moments ponctuels. En effet, les moments ponctuels les plus courants sont les moments d'axe fixe, et les moments s'exerçant suivant un axe solidaire de la structure (dits également *follower moments*). On montre (**Argyris** [1982], **Simo & Vu-Quoc** [1986.2]) que ces deux types de moments ne constituent pas un chargement *conservatif* en général et n'entrent donc pas dans le cadre de la théorie d'existence développée aux sections 2.4.3

et 2.5.3. Certains auteurs (**Ziegler** [1952], **Beck** [1955], **Argyris** [1982]) ont développé des expressions de moments conservatifs, qui ne sont cependant valables que sous des hypothèses mécaniques restrictives et pour des chargements particuliers.

Cependant, pour montrer l'efficacité de notre algorithme, nous présentons le cas d'une poutre de module d'Young  $\mathbf{E}$ , de moment d'inertie  $\mathbf{I}$  et de longueur  $L$ , encastree en l'une de ses extrémités et chargée avec un moment ponctuel  $\mathcal{M} = M\mathbf{e}_2^a$ .

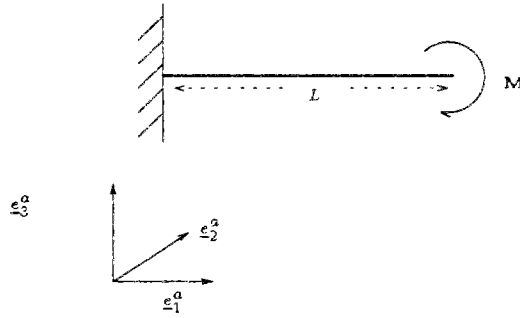


FIG. 2.7 - Poutre encastree en flexion : moment ponctuel

Soient les espaces fonctionnels :

$$\mathcal{H}^{in} = H^2(0, L; \mathbb{R}^3) \times [H^1(0, L; \mathbb{R}^3)]^3$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{in} = \{ & (\mathbf{r}, \mathbf{d}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & \mathbf{r}(0) = \mathbf{0} ; \\ & \mathbf{d}_1(0) = \mathbf{e}_2^a ; \mathbf{d}_2(0) = \mathbf{e}_3^a ; \mathbf{d}_3(0) = \mathbf{e}_1^a ; \\ & \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_k = \delta_j^k ; \\ & (\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{d}_3 > 0 ; \\ & \mathbf{r}' = \mathbf{d}_3 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}^{in}((\mathbf{r}, \mathbf{d}_j)) = \{ & (\mathbf{p}, \mathbf{g}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{p}(0) = \mathbf{0} ; \\ & {}^1\mathbf{g}_j(0) = \mathbf{0} \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \\ & \exists \mathcal{U} \in H^1(0, L; \mathbb{R}^3) \text{ tel que : } \mathbf{g}_j = \mathcal{U} \wedge \mathbf{d}_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \\ & \mathbf{p}' = \mathbf{g}_3 \} \end{aligned}$$

Le problème variationnel à résoudre s'écrit :

$$(2.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{r}, \mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in} \text{ tel que : } \forall (\mathbf{p}, \mathbf{g}_j) \in \delta \mathcal{K}^{in}((\mathbf{r}, \mathbf{d}_j)) : \\ \int_0^L \mathbf{EI} \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{p}'' = \mathbf{M} \underline{\underline{e}}_2^a \cdot \mathcal{U}(L). \end{array} \right.$$

On recherche la valeur de  $\mathbf{M}$  correspondant à une déformée circulaire dans le plan  $(\underline{\underline{e}}_1^a, \underline{\underline{e}}_3^a)$ , c'est à dire telle que le champ  $(\mathbf{r}, \mathbf{d}_j)$  défini par :

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \frac{L}{2\pi} \left( \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_1^a + (1 - \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right)) \underline{\underline{e}}_3^a \right) \\ \mathbf{d}_1(s) &= \underline{\underline{e}}_2^a \\ \mathbf{d}_2(s) &= -\sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_1^a + \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_3^a \\ \mathbf{d}_3(s) &= \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_1^a + \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_3^a \end{aligned}$$

soit solution du problème (2.48). Cette valeur est :

$$\mathbf{M}^c = \frac{2 \mathbf{EI} \pi}{L}$$

Nous quantifions l'écart à la solution exacte par la variable :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{r}(s_i) - \mathbf{r}_e(s_i)\|_{\mathbb{R}^3}^2}{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{r}_e(s_i)\|_{\mathbb{R}^3}^2}}$$

où  $N$  est le nombre de nœuds du maillage,  $s_i$  l'abscisse curviligne du  $i^{\text{ème}}$  nœud du maillage et  $\mathbf{r}_e(s_i)$  la solution exacte prévue par (2.49).

Pour  $\mathbf{EI} = 1000. N \times m^2$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  et pour un maillage comprenant 30 éléments, nous obtenons ainsi les résultats suivants :

$\frac{\mathbf{EI}}{L}$	$\sigma$	Nombre d'itérations pour $\alpha = 0.95$
10.	$2.416 \cdot 10^{-2}$	24
100.	$2.416 \cdot 10^{-2}$	22
1000.	$2.416 \cdot 10^{-2}$	23
10000.	$2.416 \cdot 10^{-2}$	23

Nos tests numériques semblent indiquer que la valeur de  $\sigma$  ne dépend que de la finesse du maillage. Les paramètres mécaniques jouent également un rôle : lorsque le rapport  $\frac{EI}{L}$  est trop faible (de l'ordre de l'unité, ou inférieur), notre algorithme ne converge plus que pour des valeurs de  $\alpha$  très proches de 1.

Nous avons également testé notre algorithme pour  $\frac{EI}{L} = 10 N \times m$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $\alpha = 1$ .

Nombre d'éléments	$\sigma$	Nombre d'itérations
20	$5.565 \cdot 10^{-2}$	5
30	$2.416 \cdot 10^{-2}$	4
50	$8.575 \cdot 10^{-3}$	4
100	$2.127 \cdot 10^{-3}$	3

### Cas 3 : torsion

Pour prouver la capacité de notre algorithme à prendre en compte les effets de torsion, nous l'appliquons à un cas test présenté dans **Bourgat, Le Tallec, Mani** [1988] : une poutre flexible, de longueur  $l$ , située dans le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$  est suspendue par ses extrémités encastées verticalement et soumise à une densité linéique d'efforts. Elle présente alors une configuration plane. On impose ensuite une rotation de  $90^\circ$  à son extrémité supérieure.

Nous ne pouvons pas estimer a priori les valeurs de la torsion  $u_3(s)$  le long du flexible. Cependant, nous pouvons faire la remarque suivante : l'équation d'équilibre

$$\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \wedge \mathbf{n} = 0$$

jointe à la condition d'inextensibilité (2.28) nous permet d'affirmer qu'à l'équilibre, la relation :

$$\forall s \in [0, l] : \mathbf{m}'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 0$$

est vérifiée. La loi de comportement :

$$\mathbf{m}(s) = \frac{\partial w^e}{\partial u_l}(s, u_j, v_k) \mathbf{d}_l(s)$$



jointe à l'expression

$$w^e(s) = \frac{\mathbf{EI}}{2} (u_1^2(s) + u_2^2(s)) + \mathbf{GI} u_3^2(s)$$

de la densité d'énergie  $w^e$  nous fournit l'expression de la densité de moments intérieurs :

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{EI}(u_1(s)\mathbf{d}_1(s) + u_2(s)\mathbf{d}_2(s)) + 2\mathbf{GI}u_3(s)\mathbf{d}_3(s)$$

Puisque pour tout  $s$  la base  $\{\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s)\}$  est orthonormée, nous avons également les conditions :

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, l] : \quad & \mathbf{d}_1(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 0 \\ & \mathbf{d}_2(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 0 \\ & \mathbf{d}_3(s) \cdot \mathbf{d}_3'(s) = 0 \\ & \mathbf{d}_3(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, l] : \quad & \mathbf{m}'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 2\mathbf{GI}u_3'(s) \\ & + \mathbf{EI}(u_1(s)\mathbf{d}_1'(s) + u_2(s)\mathbf{d}_2'(s)) \cdot \mathbf{d}_3(s) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Or :

$$u_1(s) = \mathbf{d}_2'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) \text{ et } u_2(s) = \mathbf{d}_3'(s) \cdot \mathbf{d}_1(s)$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_1(s)\mathbf{d}_1'(s) + u_2(s)\mathbf{d}_2'(s)) \cdot \mathbf{d}_3(s) &= (\mathbf{d}_2'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s))(\mathbf{d}_1'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) + \mathbf{d}_3'(s) \cdot \mathbf{d}_1(s)) \\ &= 0 \text{ d'après (2.50)} \end{aligned}$$

La relation (2.51) nous permet alors d'affirmer qu'à l'équilibre nous avons :

$$\forall s \in [0, l] : u_3'(s) = 0.$$

Nous prévoyons donc une torsion **constante** dans la longueur du flexible.

Nous avons du également modifier notre algorithme de résolution. En effet, dans sa version de base, notre algorithme exige la connaissance **explicite** des efforts et des moments ponctuels en bout de chaîne, et ceci même lorsque cette chaîne est réduite à une seule poutre comme c'est le cas pour le système mécanique de la figure 2.5. Nous avons remplacé l'opérateur  $\mathbf{H}^k$  par l'opérateur *symétrique*  $\mathbf{S}^k$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^k((\mathbf{p}, \mathcal{U}), (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}})) &= \int_0^l (\mathbf{E} - \mathbf{G})\mathbf{I} \hat{\mathbf{p}}'' \cdot \mathbf{p}'' ds \\ &+ \int_0^l \mathbf{GI} ([\hat{\mathcal{U}} \wedge [\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_1]_k]' + [\hat{\mathcal{U}} \wedge [\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_2]_k]') ds \end{aligned}$$

Nous avons également modifié l'expression de l'opérateur  $\mathbf{R}^k$  pour prendre en compte la forme symétrique (2.38) du second membre :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k((\mathbf{p}, \mathcal{U})) = & \int_0^l (\mathbf{E} - \mathbf{G}) \mathbf{I} \, [\mathbf{r}]_k'' \cdot \mathbf{p}'' \, ds + \int_0^l \mathbf{G} \mathbf{I} \, [[\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_1]_k]' \, ds \\ & + \int_0^l \mathbf{G} \mathbf{I} \, [[\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_2]_k]' \, ds - \left\{ \int_0^l \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} \, ds + \mathcal{F} \cdot \mathbf{p}(l) \right\} \end{aligned}$$

Cette expression ne requiert pas la connaissance de l'effort ponctuel  $\mathcal{F}$  en raison de la condition de blocage  $\mathbf{p}(l) = 0$ .

Les paramètres mécaniques du test sont les suivants :

$$\mathbf{EI} = 4350 \, N \times m^2$$

$$\mathbf{GI} = 4000 \, N \times m^2$$

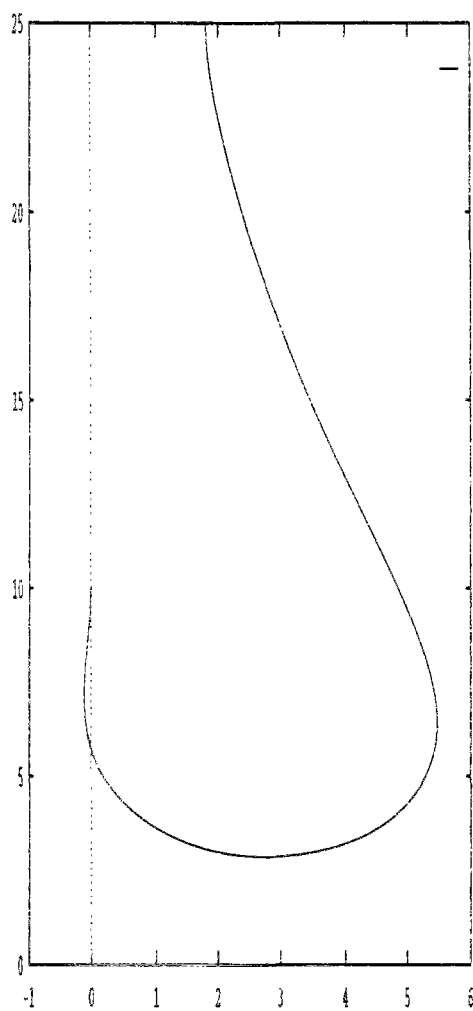
$$l = 32.6m$$

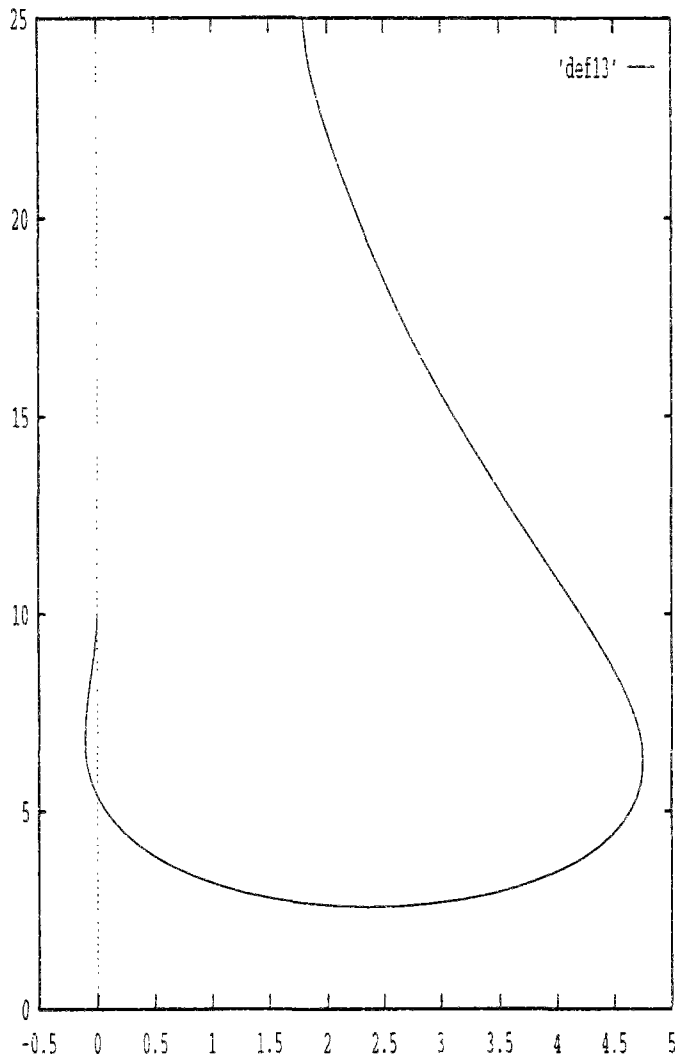
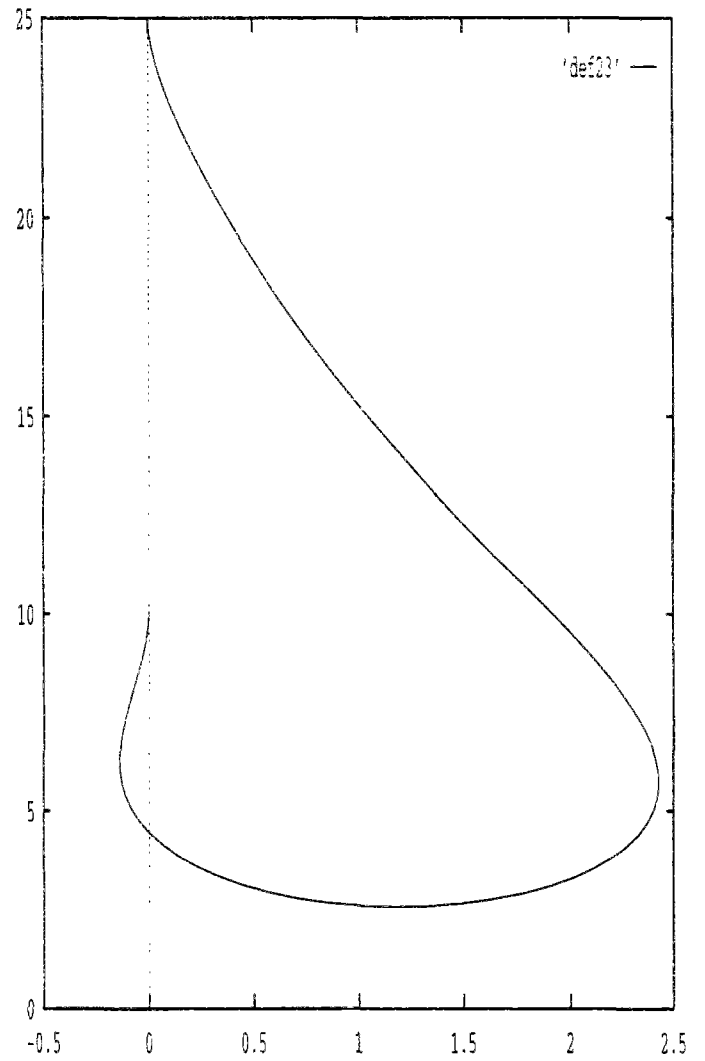
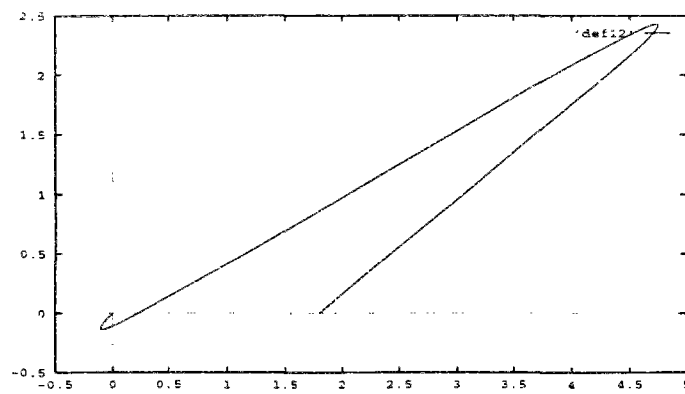
$$\mathbf{f} = 75 \, N/m$$

Les extrémités ont pour coordonnées :

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0, 10), \quad \mathbf{r}(l) = (1.8, 0, 25).$$

Notre maillage comprend 100 éléments de taille égale. La configuration plane est obtenue en 34 itérations pour  $\alpha = 0, \beta = 0$ . La configuration déformée après torsion est obtenue en 201 itérations, et nous nous servons de la configuration plane pour initialiser l'algorithme. Nous donnons ici la configuration plane (figure 2.8) ainsi que les trois projections de la déformée, dans les plans  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$  (figure 2.9),  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$  (figure 2.10) et  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$  (figure 2.11). Nous choisissons pour ce test, une interpolation  $P_2$  des variables  $\mathbf{d}_j$ , afin d'assurer une meilleure approximation de la torsion  $u_3(s)$ .

FIG. 2.8 - *Configuration plane*

FIG. 2.9 -  $Plan (e_1^a, e_3^a)$ FIG. 2.10 -  $Plan (e_2^a, e_3^a)$ FIG. 2.11 -  $Plan (e_1^a, e_2^a)$

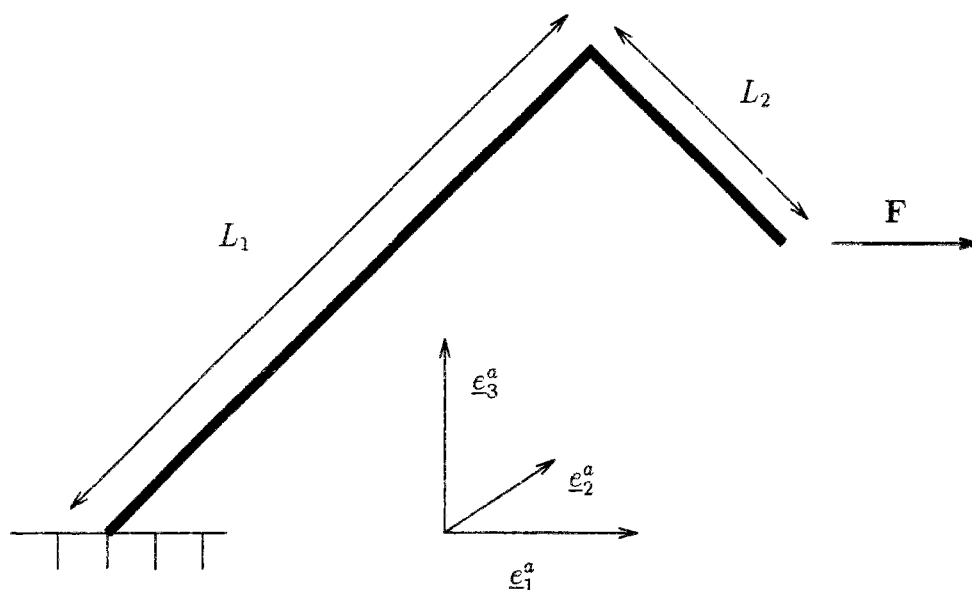
Ces déformées présentent un bon accord avec le cas test présenté dans **Bourgat, Le Tallec, Mani [1988] ([BLTM.88])**, en particulier en ce qui concerne le gauchissement de la barre sous l'effet de la torsion imposée (plans  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$  et  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ ). Cependant les valeurs de la torsion calculées en quelques points du maillage semblent plus en accord avec la physique du problème (torsion constante le long du flexible).

Valeur de $u_3$	$s = 9$	$s = 20$	$s = 32.6$
Calculée	0.01782	0.01787	0.01792
[BLTM.88]	0.0184	0.0197	0.0203

## 2.7.2 Cas avec raccord

### Cas 1 : Poutres en flexion

Nous considérons maintenant une structure formée de deux poutres, chargée dans son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ , par une force ponctuelle  $\mathbf{F}$  de direction  $\underline{e}_1^a$ . Les paramètres



mécaniques du test sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{EI} &= 166.67 \, N \times m^2 \\ L1 &= 2\sqrt{2} \, m, L2 = \sqrt{2} \, m \end{aligned}$$

L'articulation, d'axe  $\underline{e}_2^a$  a pour raideur  $\kappa_1 = 10 \, N \times m$ . Notre maillage est formé de 10 éléments par poutre. La configuration initiale est caractérisée par les paramètres  $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$  (identiques pour les deux poutres) : elle est à dessein très éloignée de la configuration non déformée, ceci afin de montrer la robustesse de notre algorithme. Nous donnons ici successivement les configurations initiale (en trait continu) et non déformée (en trait pointillé) puis pour les valeurs  $-1 \, N, +1 \, N, +10 \, N, +100 \, N$  de  $\mathbf{F}$  les configurations déformée (en trait pointillé) et non déformée (en trait continu).

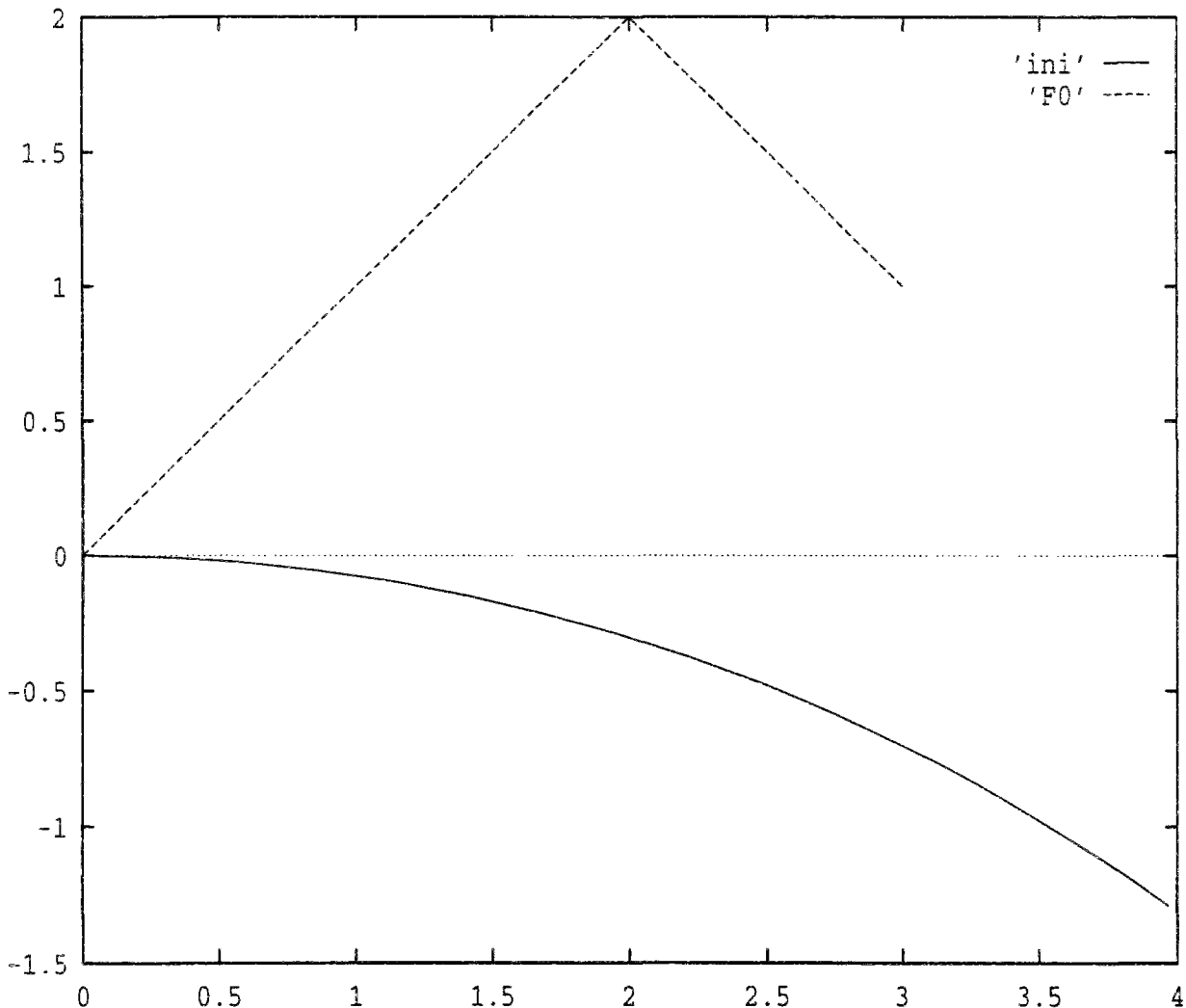
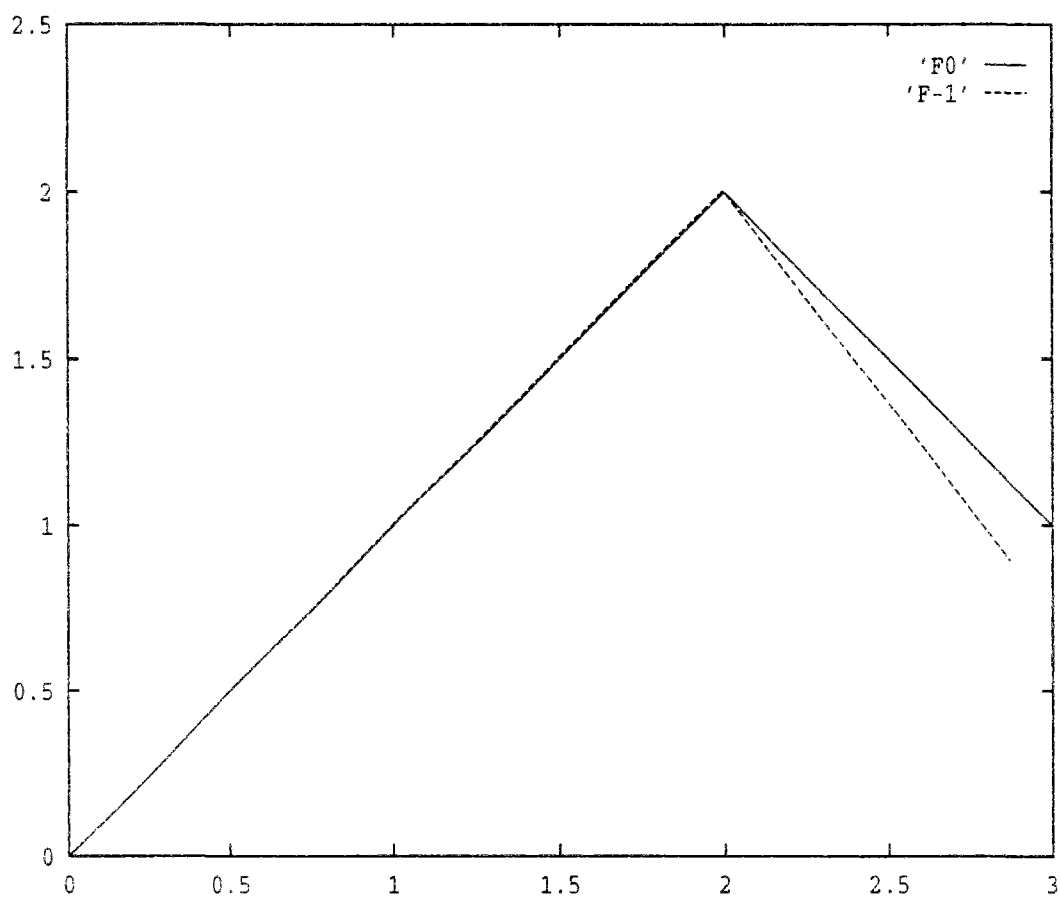
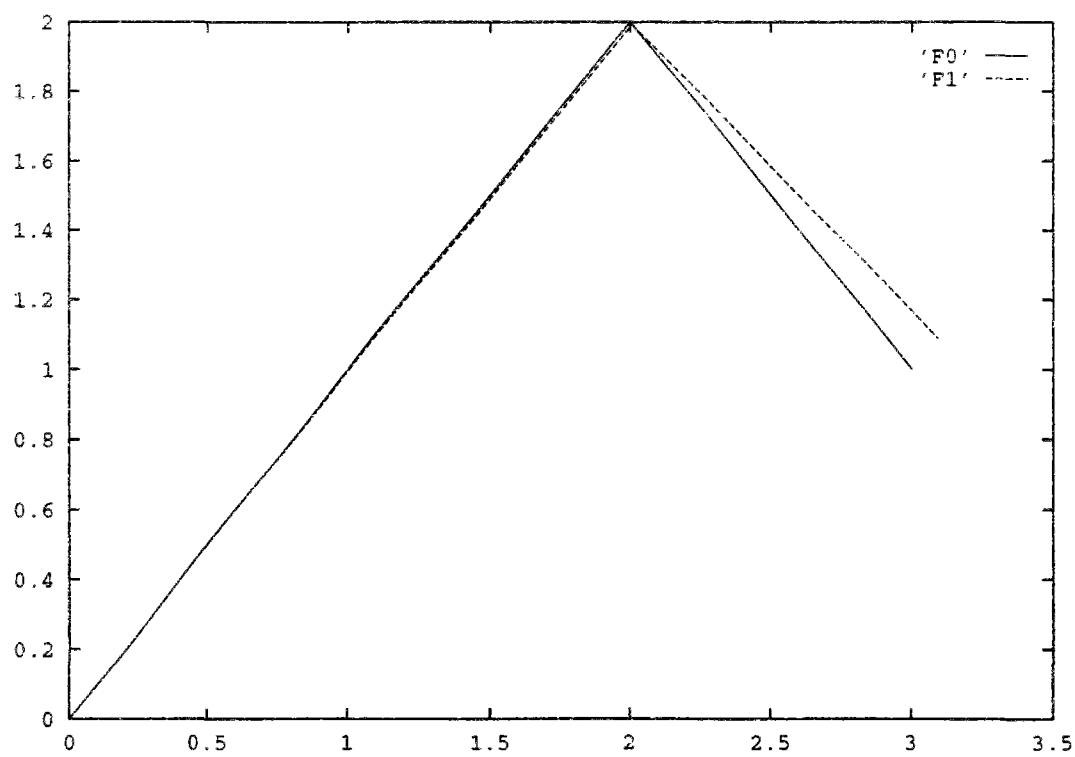
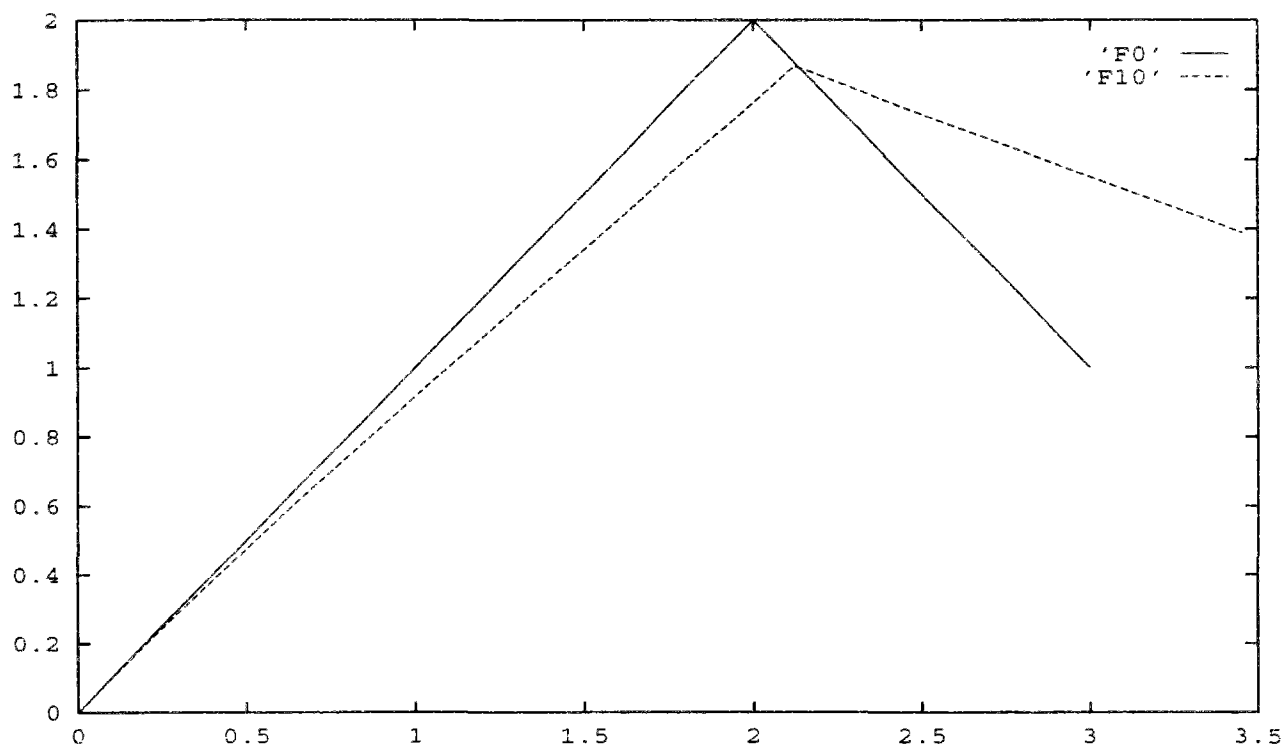
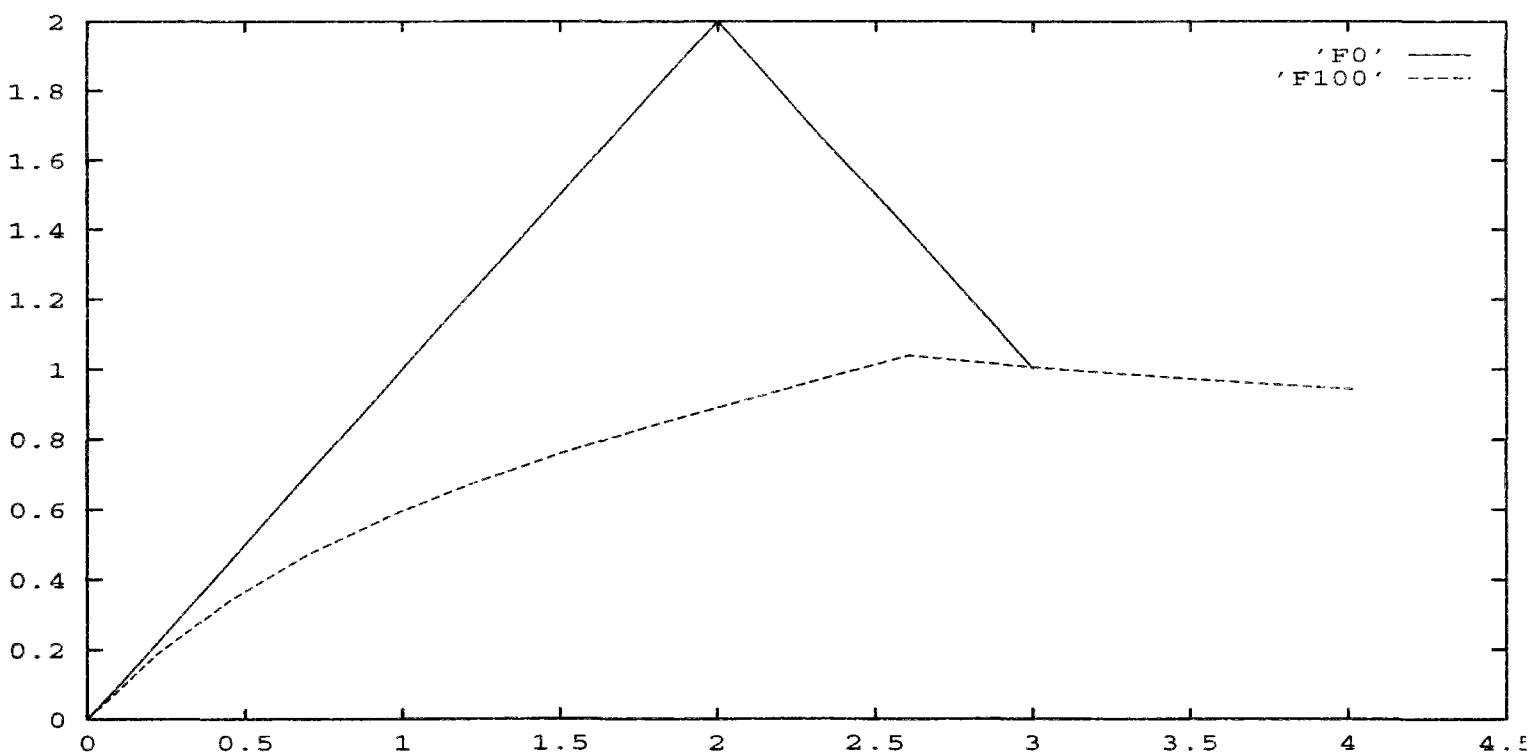


FIG. 2.12 - Configuration initiale et configuration non déformée

FIG. 2.13 -  $F = -1 N$ FIG. 2.14 -  $F = +1 N$

FIG. 2.15 -  $F = +10 N$ FIG. 2.16 -  $F = +100 N$



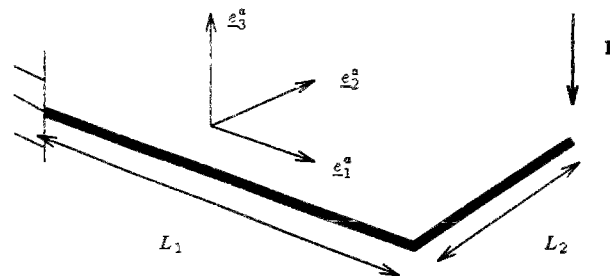
Les équations d'équilibre de notre structure ne possèdent pas, à notre connaissance, de solution analytique. La démarche que nous avons adoptée est la suivante : nous avons cherché une solution approchée des équations d'équilibre à l'aide du logiciel de calcul formel **Maple V.3**, en remplaçant les termes non linéaires par une approximation grossière. Nous avons ainsi pu "vérifier" certains de nos résultats, au moins dans le cas de petits efforts. A titre d'exemple, voici ce que nous avons obtenu dans le cas  $\mathbf{F} = +1 \text{ N}$  :

$\mathbf{F} = +1 \text{ N}$	$\Delta h$	$\Delta v$
Éléments finis	+0.094480 m	+0.088459 m
Maple V.3	+ 0.094766 m	+ 0.088972 m

les quantités  $\Delta h$  et  $\Delta v$  désignant respectivement les déplacements suivant  $\underline{e}_1^a$  et  $\underline{e}_2^a$  de l'extrémité de la seconde poutre.

### Cas 2 : Poutres en flexion-torsion

Nous considérons maintenant une structure formée de deux poutres, chargée orthogonalement à son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ , par une force ponctuelle  $\mathbf{F}$  de direction  $\underline{e}_3^a$ .



Les paramètres mécaniques du test sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{EI} &= 90 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ \mathbf{GI} &= 100 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ L_1 &= 2\sqrt{2} \text{ m}, L_2 = \sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

L'articulation, d'axe  ${}^1\mathbf{d}_3(L_1) = -{}^2\mathbf{d}_1(0)$  a pour raideur  $\kappa_1 = 10N \times m$ . Notre maillage est formé de 10 éléments par poutre. La configuration initiale est caractérisée par les paramètres  $\alpha = 0.1, \beta = 0$ , pour les poutres 1 et 2.

Nous avons testé les valeurs  $+1 N, +10 N, +100 N$  de  $\mathbf{F}$ . Nous donnons pour chacune de ces valeurs la projection de la déformée de la structure dans les plans  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$  (*plan de face*, figure 2.17) et  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$  (*plan de profil*, figure 2.18).

## 2.8 Comparaison avec l'approche convective

Nous montrons dans cette section comment passer de l'approche globale à l'approche convective. Nous examinons pour ce faire les équations d'équilibre d'une poutre droite  $\mathbf{P}$ , de longueur  $l$ , encastree en l'une de ses extrémités et soumise à une densité linéique  $\mathbf{f}$  d'efforts. Nous supposons que la barre  $\mathbf{B}$  qu'elle modélise est à section circulaire constante.

Dans le cadre de l'approche convective, nous faisons l'hypothèse que le déplacement réel  $\underline{w} = (w_1(x, y, z), w_2(x, y, z), w_3(x, y, z))$  de la barre modélisée par notre poutre vérifie l'hypothèse de Timoshenko et est donc donné par :

$$\begin{aligned} w_1(x, y, z) &= u_1(x) - y \theta_3(x) + z \theta_2(x) \\ w_2(x, y, z) &= u_2(x) - z \theta_1(x) \\ w_3(x, y, z) &= u_3(x) + y \theta_1(x) \end{aligned}$$

en composantes dans le repère principal d'inertie  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  de la barre,  $x, y$  et  $z$  étant les coordonnées dans ce repère. La position *après déformation*  $\underline{p}^c(x, y, z)$  d'un point de la barre repéré par les coordonnées  $(x, y, z)$  en configuration non déformée est donc :

$$\begin{aligned} \underline{p}_1^c(x, y, z) &= x + u_1(x) - y \theta_3(x) + z \theta_2(x) \\ \underline{p}_2^c(x, y, z) &= y + u_2(x) - z \theta_1(x) \\ \underline{p}_3^c(x, y, z) &= z + u_3(x) + y \theta_1(x) \end{aligned} \quad (2.52)$$

en composantes dans le repère principal d'inertie  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .

Dans le formalisme de l'approche globale, la position *après déformation*  $\underline{p}^g(x, y, z)$  d'un point de la barre repéré par les coordonnées  $(x, y, z)$  en configuration non déformée est donnée par :

$$\underline{p}^g(x, y, z) = \mathbf{r}(x) + y \mathbf{d}_1(x) + z \mathbf{d}_2(x) \quad (2.53)$$

où  $(\mathbf{d}_1(x), \mathbf{d}_2(x))$  représente la base (orthonormée) d'inertie de la section droite d'abscisse  $x$  de la barre.

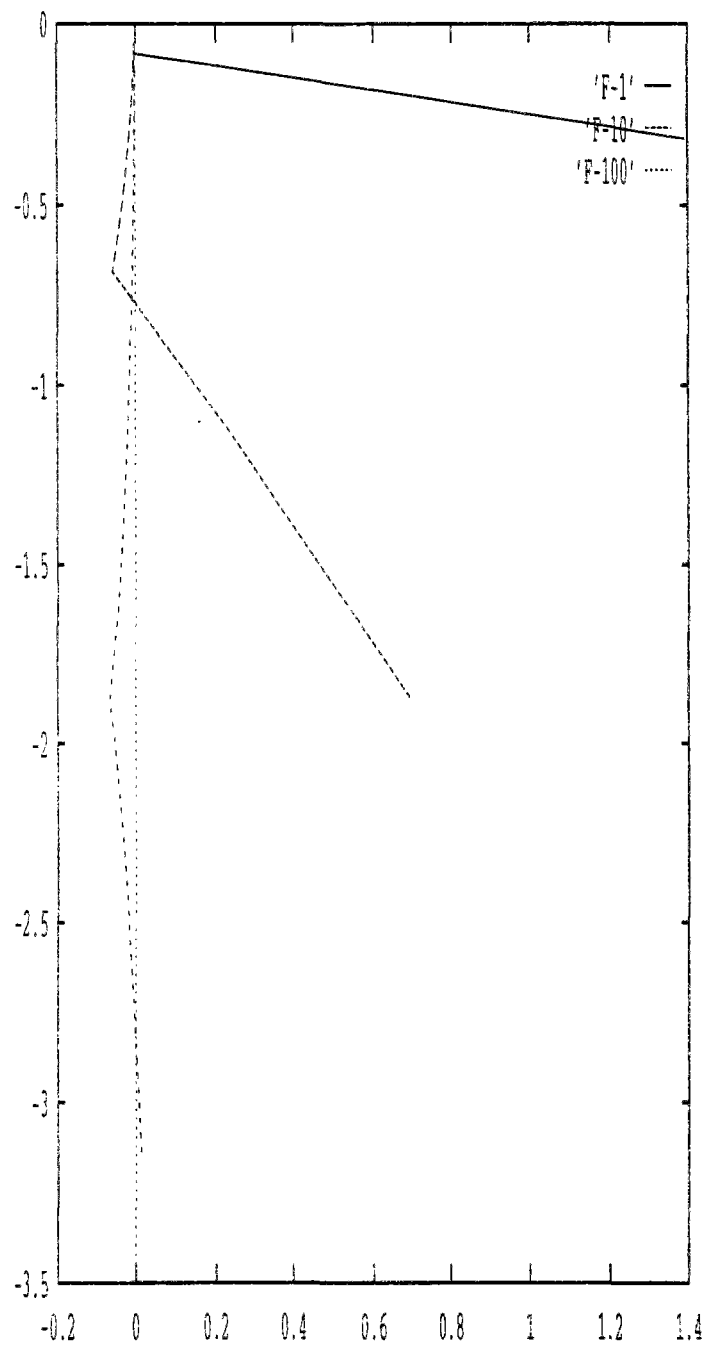
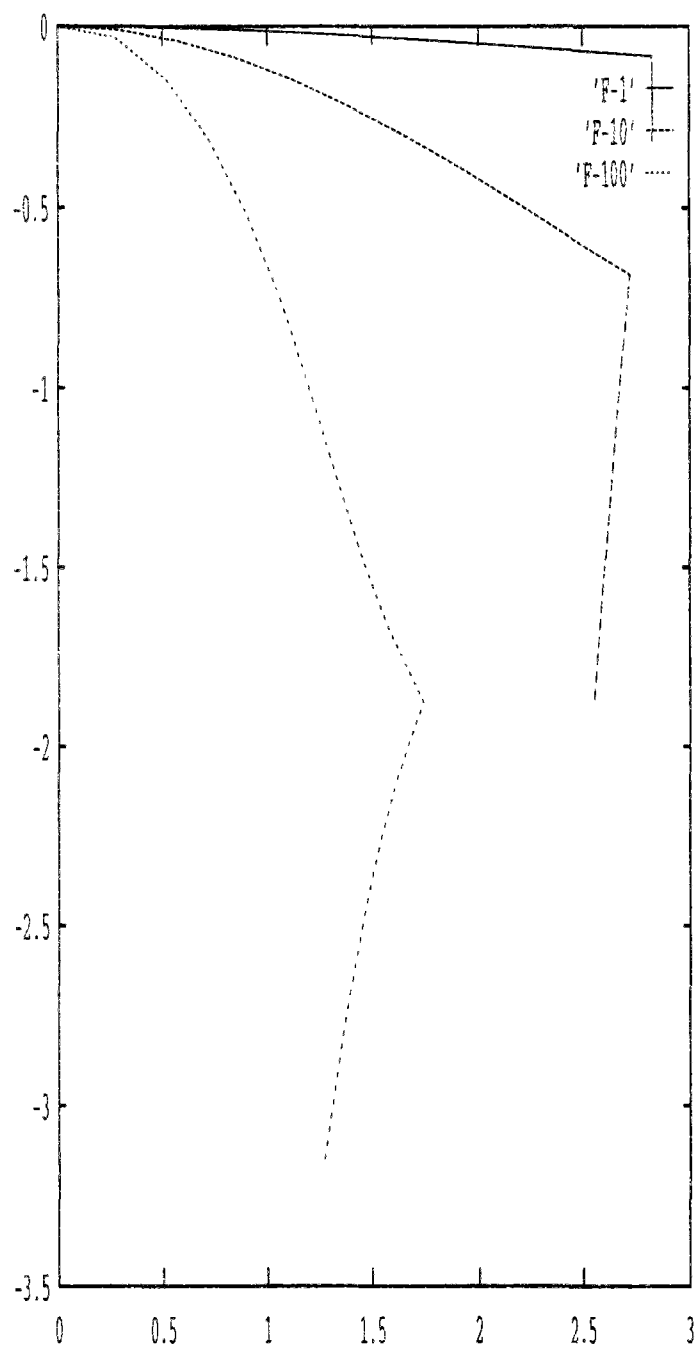
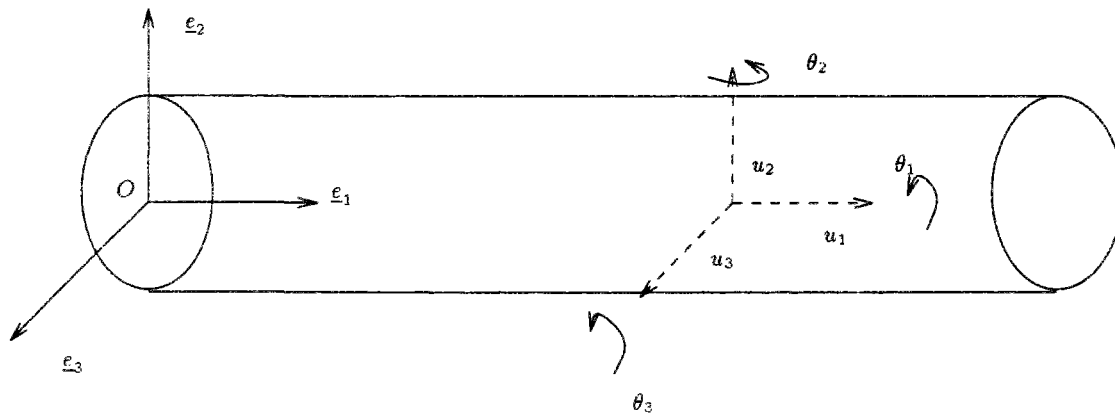


FIG. 2.17 - Déformées : Plan de face

FIG. 2.18 - *Déformées: Plan de profil*

FIG. 2.19 - *Approche convective*

Les cinématiques (2.52) et (2.53) autorisent toutes les deux les cisaillements transverses, les flexions, la torsion et l'allongement de la barre. Elles ne permettent cependant pas de représenter les déformations dans le plan des sections droites.

Les correspondances entre les cinématiques (2.52) et (2.53) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x) &\approx (x + u_1(x)) \underline{e}_1 + u_2(x) \underline{e}_2 + u_3(x) \underline{e}_3 \\ \mathbf{d}_1(x) &\approx -\theta_3(x) \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \theta_1(x) \underline{e}_3 \\ \mathbf{d}_2(x) &\approx \theta_2(x) \underline{e}_1 - \theta_1(x) \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Comme le cadre de l'approche convective est celui des petits déplacements élastiques, nous avons également la correspondance :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_3(x) &= \mathbf{d}_1(x) \wedge \mathbf{d}_2(x) \\ &\approx \underline{e}_1 + \theta_3(x) \underline{e}_2 - \theta_2(x) \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Nous avons de même, en négligeant les produits de quantités infinitésimales, la

correspondance des mesures de déformation :

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_1(x) &= \mathbf{d}'_2(x) \cdot \mathbf{d}_3(x) \\
 &\approx \theta'_2(x) \\
 \hat{u}_2(x) &= \mathbf{d}'_3(x) \cdot \mathbf{d}_1(x) \\
 &\approx \theta'_3(x) \\
 \hat{u}_3(x) &= \mathbf{d}'_1(x) \cdot \mathbf{d}_2(x) \\
 &\approx \theta'_1(x) \\
 \hat{v}_1(x) &= \mathbf{r}'(x) \cdot \mathbf{d}_1(x) \\
 &\approx u'_2(x) - \theta_3(x) \\
 \hat{v}_2(x) &= \mathbf{r}'(x) \cdot \mathbf{d}_2(x) \\
 &\approx u'_3(x) + \theta_2(x) \\
 \hat{v}_3(x) &= \mathbf{r}'(x) \cdot \mathbf{d}_3(x) \\
 &\approx 1 + u'_1(x)
 \end{aligned}$$

où ' désigne la dérivation par rapport à  $x$ . La loi de comportement adoptée pour l'approche globale, à savoir :

$$\mathbf{m}(x) = \mathbf{EI}(\hat{u}_1(x) \mathbf{d}_1(x) + \hat{u}_2(x) \mathbf{d}_2(x)) + 2 \mathbf{GI} \hat{u}_3(x) \mathbf{d}_3(x)$$

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{GS}(\hat{v}_1(x) \mathbf{d}_1(x) + \hat{v}_2(x) \mathbf{d}_2(x)) + \mathbf{ES}(\hat{v}_3(x) - 1) \mathbf{d}_3(x)$$

devient, en négligeant les produits de quantités infinitésimales :

$$\begin{cases} \mathbf{m}(x) = \mathbf{EI}(\theta'_2(x) \mathbf{e}_2 + \theta'_3(x) \mathbf{e}_3) + 2 \mathbf{GI} \theta'_1(x) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{n}(x) = \mathbf{GS}([u'_2(x) - \theta_3(x)] \mathbf{e}_2 + [u'_3(x) + \theta_2(x)] \mathbf{e}_3) + \mathbf{ES} u'_1(x) \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

Les équations d'équilibre

$$(2.54) \quad \begin{cases} \mathbf{m}'(x) + \mathbf{r}'(x) \wedge \mathbf{n}(x) = 0 \\ \mathbf{n}'(x) + \mathbf{f}(x) = 0 \end{cases}$$

associées à l'approche globale s'écrivent :

$$(2.55) \quad \begin{cases} \mathbf{EI} \theta''_2(x) - \mathbf{GS}[u'_2(x) - \theta_3(x)] = 0 \\ \mathbf{EI} \theta''_3(x) + \mathbf{GS}[u'_3(x) + \theta_2(x)] = 0 \\ \mathbf{GI} \theta''_1(x) = 0 \end{cases}$$

$$(2.56) \quad \begin{cases} \text{GS} [u_2'(x) - \theta_3(x)]' + \mathbf{f}_2(x) = 0 \\ \text{GS} [u_3'(x) + \theta_2(x)]' + \mathbf{f}_3(x) = 0 \\ \text{ES} u_1''(x) + \mathbf{f}_1(x) = 0 \end{cases}$$

où  $(\mathbf{f}_1(x), \mathbf{f}_2(x), \mathbf{f}_3(x))$  sont les composantes de  $\mathbf{f}(x)$  dans le repère  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .

Les équations d'équilibre (2.55) et (2.56) correspondent aux équations classiques d'équilibre d'une poutre de Timoshenko, que l'on retrouve donc à partir de l'approche globale.

On peut éliminer les quantités

$$[u_2'(x) - \theta_3(x)] \text{ et } [u_3'(x) + \theta_2(x)]$$

entre les équations (2.55) et (2.56) pour obtenir :

$$\begin{cases} \text{ES} u_1''(x) + \mathbf{f}_1(x) = 0 \\ \text{EI} \theta_2'''(x) + \mathbf{f}_3(x) = 0 \\ \text{EI} \theta_3'''(x) + \mathbf{f}_2(x) = 0 \\ \text{GI} \theta_1''(x) = 0 \end{cases}$$

dont on peut déduire les équations classiques de poutre *sans cisaillement* (hypothèse de Navier-Bernoulli) en se servant des conditions géométriques :

$$[u_2'(x) - \theta_3(x)] = 0 \text{ et } [u_3'(x) + \theta_2(x)] = 0$$

On obtient alors

$$(2.57) \quad \begin{cases} \text{ES} u_1''(x) + \mathbf{f}_1(x) = 0 \\ \text{EI} u_3''''(x) - \mathbf{f}_3(x) = 0 \\ \text{EI} u_2''''(x) - \mathbf{f}_2(x) = 0 \\ \text{GI} \theta_1''(x) = 0 \end{cases}$$

Le modèle global inextensible est un modèle pour lequel :

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(x) &= 0, \\ \hat{v}_2(x) &= 0, \\ \hat{v}_3(x) &= 1. \end{aligned}$$

c'est à dire, dans le formalisme de l'approche convective :

$$\begin{aligned} u_1'(x) &\approx 0, \\ u_2'(x) &= \theta_3(x), \\ u_3'(x) &= -\theta_2(x). \end{aligned}$$

D'après (2.54), nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(x) &= \int_x^l \mathbf{f}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathbf{n}_1(x) e_1 + \mathbf{n}_2(x) e_2 + \mathbf{n}_3(x) e_3 \end{aligned}$$

et l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{m}'(x) + \mathbf{r}'(x) \wedge \mathbf{n}(x) = 0$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{GI} \theta_1''(x) &= \mathbf{n}_2(x) u_3'(x) - \mathbf{n}_3(x) u_2'(x) \\ \mathbf{EI} u_2'''(x) &= \mathbf{n}_1(x) u_2'(x) - \mathbf{n}_2(x) (1 + u_1'(x)) \\ \mathbf{EI} u_3'''(x) &= \mathbf{n}_1(x) u_3'(x) - \mathbf{n}_3(x) (1 + u_1'(x)) \end{aligned}$$

Le modèle convectif limite correspondant au modèle global inextensible serait donc :

$$(2.58) \quad \begin{cases} 2 \mathbf{GI} \theta_1''(x) &= \mathbf{n}_2(x) u_3'(x) - \mathbf{n}_3(x) u_2'(x) \\ \mathbf{EI} u_2'''(x) &= \mathbf{n}_1(x) u_2'(x) - \mathbf{n}_2(x) \\ \mathbf{EI} u_3'''(x) &= \mathbf{n}_1(x) u_3'(x) - \mathbf{n}_3(x) \\ u_1'(x) &= 0 \end{cases}$$

Le modèle (2.58) est donc incapable de représenter des cas où le déplacement longitudinal  $u_1(x)$  est non nul. Sauf cas particuliers, il n'est donc pas exploitable.

Pour conclure sur le cas **statique**, nous pouvons dire que si l'on doit considérer un modèle avec allongement (avec ou sans cisaillement) et si les efforts sont suffisamment faibles pour que l'hypothèse des petits déplacements élastiques soit vérifiée, l'approche convective s'impose car elle conduit à des équations linéaires. Dans tous les autres cas (grands déplacements élastiques, modèles sans allongement), c'est l'approche globale qui doit être utilisée.





## **Partie B**

### **Problème dynamique direct**



# Chapitre 1

## Approche convective

---

### 1.1 Introduction et notations

Nous considérons maintenant l'évolution au cours du temps, d'une chaîne ouverte simple, constituée de  $nt$  poutres flexibles. Nous nous fixons une durée d'observation  $[0; T]$  et nous notons  $t$  l'instant courant, appartenant à  $[0; T]$ .

Nous sommes ainsi amenés à modifier certaines notations par rapport au cas statique, et à en introduire de nouvelles. Ces modifications sont rassemblées dans le tableau suivant :

- $O_i(t)$  : point de la barre  $i$  appartenant à la section de la barre  $i$  en contact avec la barre  $i - 1$ , situé sur l'axe moyen de la barre  $i$  et choisi comme origine de son repère principal d'inertie à l'instant  $t$ .
- $[O_i(t), \{e^i(t)\}] = [O_i(t), (\underline{e}_1^i(t), \underline{e}_2^i(t), \underline{e}_3^i(t))]$  : repère principal d'inertie de la barre  $i$  à l'instant  $t$ .
- $(x_i, y_i, z_i)$  : coordonnées dans ce repère.
- $[O_i(0), \{e^i(0)\}]$  : repère principal d'inertie de la barre  $i$  à l'instant  $t = 0$ . Ce repère, dit également *repère de référence*, sert à définir la configuration de référence de la barre  $i$ . Le vecteur  $\overrightarrow{O_i(0)O_i(t)}$  est noté  $\vec{T}^i(t)$ .
- $\underline{u}^i(x_i, t)$  : champ de déplacement élastique de la ligne moyenne de la barre  $i$ .
- $\underline{\theta}^i(x_i, t)$  : champ de rotation élastique de la section d'abscisse  $x_i$  de la barre  $i$ .

- $C^i(t)$ : configuration de la barre  $i$  à l'instant  $t$ .
- $R^i(t)$  la matrice de rotation telle que :  
 $\{e^i(t)\} = R^i(t) \cdot \{e^i(0)\}.$
- $\rho^i$ : masse volumique de la barre  $i$ .

On définit la matrice antisymétrique  $W^i(t)$  par :

$$W^i(t) = \dot{R}^i(t) \cdot {}^tR^i(t) = \begin{pmatrix} 0 & w_3^i(t) & -w_2^i(t) \\ -w_3^i(t) & 0 & w_1^i(t) \\ w_2^i(t) & -w_1^i(t) & 0 \end{pmatrix}$$

où  $\dot{\phantom{x}}$  désigne la dérivation par rapport au temps  $t$ . Le vecteur de composantes  $(w_1^i(t), w_2^i(t), w_3^i(t))$  dans la base  $\{e^i(t)\}$  est noté  $\underline{w}^i(t)$ . C'est le vecteur rotation de la base  $\{e^i(t)\}$  par rapport à la base  $\{e^i(0)\}$ .

## 1.2 Modélisation mécanique

On considère une poutre appartenant à la chaîne (pour alléger les notations, on ne tient pas compte dans cette section, de son indice  $i$ ). Nous reprenons l'hypothèse selon laquelle le déplacement du point courant de cette poutre est représenté par un torseur de résultante  $\underline{u}(x, t)$  et de moment  $\underline{\theta}(x, t)$ .

Nous adoptons donc le modèle suivant pour la position  $\Phi(x, y, z, t)$  d'un point  $M(t)$  de la configuration  $C(t)$ :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= O(0) \overrightarrow{OM}(t), \\ &= \{{}^t\vec{T}(t)\} \cdot \{e(0)\} + \left\{ \begin{bmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \\ z + v_3 \end{bmatrix} \right\} \cdot \{e(t)\}, \end{aligned}$$

où :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v_1(x, y, z, t) &\approx u_1(x, t) - y \theta_3(x, t) + z \theta_2(x, t) \\ v_2(x, y, z, t) &\approx u_2(x, t) - z \theta_1(x, t) \\ v_3(x, y, z, t) &\approx u_3(x, t) + y \theta_1(x, t) \end{aligned}$$

**Remarque :** Le déplacement  $\underline{v}$  ne se confond pas avec le déplacement réel de la barre associée à notre poutre: si l'on applique un chargement réel à un solide tridimensionnel élancé, et si l'on calcule le déplacement élastique associé par la méthode des contraintes, on ne retrouve pas, sauf cas particulier, la forme (1.2), du fait du

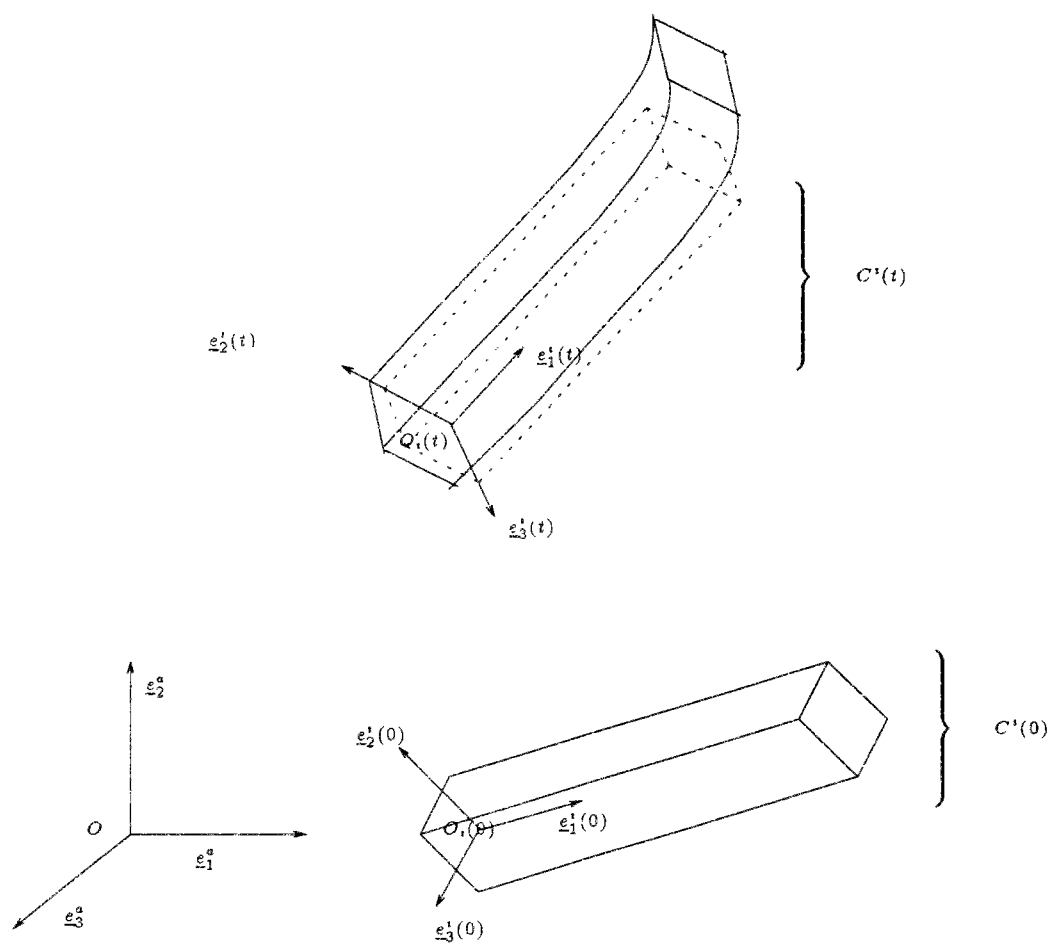


FIG. 1.1 - Configurations et repères pour l'approche convective

gauchissement des sections planes et de l'effet Poisson. Ceci n'empêche pas de *postuler* la forme (1.2) du déplacement, comme nous le faisons ici.

On définit la matrice  $\Lambda(x, t)$  par :

$$\Lambda(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & \theta_3(x, t) & -\theta_2(x, t) \\ -\theta_3(x, t) & 1 & \theta_1(x, t) \\ \theta_2(x, t) & -\theta_1(x, t) & 1 \end{bmatrix} \cdot R(t).$$

Nous avons alors :

$$\Phi(x, y, z, t) - \Phi(x, 0, 0, t) = \begin{bmatrix} 0 & y & z \end{bmatrix} \cdot \{\Lambda(x, t) \cdot \{e(0)\}\}.$$

**Remarque :** *Les vecteurs :*

$$\begin{aligned} \underline{t}_2(x, t) &= -\theta_3 \underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t) + \theta_1 \underline{e}_3(t), \\ \underline{t}_3(x, t) &= \theta_2 \underline{e}_1(t) - \theta_1 \underline{e}_2(t) + \underline{e}_3(t), \end{aligned}$$

que l'on peut supposer orthogonaux et normés dans l'hypothèse de petits déplacements élastiques, s'interprètent comme la base principale d'inertie de la section d'abscisse  $x$ . La normale  $\underline{n}(x, t)$  à cette section est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{n}(x, t) &= \underline{t}_2(x, t) \wedge \underline{t}_3(x, t), \\ &\simeq \underline{e}_1(t) + \theta_3 \underline{e}_2(t) - \theta_2 \underline{e}_3(t). \end{aligned}$$

Nous avons de plus :

$$\{\mathbf{t}\} = \Lambda \cdot \{e(0)\},$$

où :

$$\{\mathbf{t}\} = \{\underline{n}(x, t), \underline{t}_2(x, t), \underline{t}_3(x, t)\}.$$

Dans le cadre de l'hypothèse de *petits déplacements élastiques*, où nous nous plaçons, la matrice :

$$\Omega(x, t) = \Lambda'(x, t) \cdot {}^t\Lambda(x, t)$$

peut être considérée comme antisymétrique

$$\Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3(x, t) & -\omega_2(x, t) \\ -\omega_3(x, t) & 0 & \omega_1(x, t) \\ \omega_2(x, t) & -\omega_1(x, t) & 0 \end{pmatrix}$$

et on désigne par  $\underline{\omega}(x, t)$  le vecteur de composantes  $\{\omega_j(x, t)\}_{j=1, \dots, 3}$  dans  $\{\mathbf{t}\}$ . C'est le vecteur rotation élastique de la base  $\{\mathbf{t}\}$  par rapport à la base  $\{e(0)\}$ .

### 1.2.1 Conservation de la quantité de mouvement

On définit la densité linéique  $\mathcal{L}(x, t)$  de quantité de mouvement linéaire par :

$$\mathcal{L}(x, t) = \int_{\omega} \rho \dot{\Phi}(x, y, z, t) dy dz$$

En se servant des propriétés du repère principal d'inertie, on obtient l'expression :

$$(1.3) \quad \frac{\mathcal{L}(x, t)}{\rho S} = {}^t\dot{\vec{T}}(t) \cdot \{e(0)\} + \left\{ \begin{bmatrix} x + u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot W(t) + \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} \right\} \cdot \{e(t)\}$$

On définit la densité linéique  $\mathcal{H}(x, t)$  de quantité de mouvement angulaire par :

$$\mathcal{H}(x, t) = \int_{\omega} \rho (\Phi(x, y, z, t) - \Phi(x, 0, 0, t)) \wedge (\dot{\Phi}(x, y, z, t) - \dot{\Phi}(x, 0, 0, t)) dy dz$$

On linéarise cette expression en tenant compte de l'hypothèse de petites déformations élastiques pour obtenir finalement :

$$(1.4) \quad \frac{\mathcal{H}(x, t)}{\rho} = \left\{ \begin{bmatrix} J(\dot{\theta}_1 + w_1) + I_3 w_2 \theta_3 - I_2 w_3 \theta_2 \\ I_2(\dot{\theta}_2 + w_2) + I_3 w_1 \theta_3 + (I_2 - I_3) w_3 \theta_1 \\ I_3(\dot{\theta}_3 + w_3) - I_2 w_1 \theta_2 + (I_2 - I_3) w_2 \theta_1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \{e(t)\}$$

Soit  $\mathbf{P}(x, y, z)$  le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff relatif à la section de la barre d'abscisse  $x$  en configuration de référence.

$$\mathbf{P}(x, y, z) = \mathbf{T}_1(x, y, z) \otimes \underline{e}_1(0) + \mathbf{T}_2(x, y, z) \otimes \underline{e}_2(0) + \mathbf{T}_3(x, y, z) \otimes \underline{e}_3(0)$$

On définit la densité linéique d'efforts intérieurs dans la configuration courante par :

$$(1.5) \quad \underline{X}(x, t) = \int_{\omega} \mathbf{T}_1(x, y, z) dy dz$$

De même, la densité linéique de moments intérieurs dans la configuration courante est définie par :

$$(1.6) \quad \underline{\Gamma}(x, t) = \int_{\omega} [\Phi(x, y, z, t) - \Phi(x, 0, 0, t)] \wedge \mathbf{T}_1(x, y, z) dy dz$$

On montre alors (Simo [1985]) qu'en l'absence de chargement réparti sur la surface extérieure de la barre, on peut écrire les équations de conservation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \underline{X}'(x, t) + \underline{f}(x, t) = \dot{\underline{L}}(x, t) \\ \underline{\Gamma}'(x, t) + \underline{e}_1(t) \wedge \underline{X}(x, t) = \dot{\underline{\mathcal{H}}}(x, t) \end{cases}$$



### 1.2.2 Loi de comportement - Equations du mouvement

Soit  $\nabla$  l'opérateur :

$$\nabla = \begin{matrix} \mathbf{t} \\ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \end{matrix},$$

et soit  $\mathbf{F}$  le gradient de la déformation :

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi(x, y, z, t).$$

La puissance volumique des efforts intérieurs est alors définie par :

$$\Pi = \int_{\omega \times [0; t]} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dx \, dy \, dz.$$

Nous allons montrer le lemme :

#### Lemme 1.2.1

$$(1.8) \quad \Pi \approx \int_0^t \underline{X}(x, t) \cdot \mathcal{D}(\underline{\gamma}(x, t)) + \underline{\Gamma}(x, t) \cdot \mathcal{D}(\underline{\omega}(x, t)) \, dx$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) &= \Phi'(x, 0, 0, t) - \underline{n}(x, t), \\ \underline{\mathbf{w}} &= \underline{w} + \dot{\theta}_1(x, t) \underline{e}_1(t) + \dot{\theta}_2(x, t) \underline{e}_2(t) + \dot{\theta}_3(x, t) \underline{e}_3(t), \\ \mathcal{D}(\cdot) &= \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) - \underline{\mathbf{w}} \wedge (\cdot); \end{aligned}$$

Démonstration : Sous l'hypothèse de petites déformations élastiques, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\simeq \begin{bmatrix} \mathbf{t} \left[ \begin{array}{c} 1 + u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{array} \right] \cdot \{e(t)\} + \underline{\omega}(x, t) \wedge (\Phi(x, y, z, t) - \Phi(x, 0, 0, t)) \\ \otimes \underline{e}_1(0) \\ + [-\theta_3 \underline{e}_1(t) + \underline{e}_2(t) + \theta_1 \underline{e}_3(t)] \otimes \underline{e}_2(0) + [\theta_2 \underline{e}_1(t) - \theta_1 \underline{e}_2(t) + \underline{e}_3(t)] \otimes \underline{e}_3(0). \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Négligeant les produits de quantités infinitésimales, nous faisons l'approximation :

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(\underline{t}_i(x, t)) &\approx 0 \quad i = 2, 3, \\ \mathcal{D}(\underline{n}(x, t)) &\approx 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &\simeq [\underline{\mathbf{w}} \wedge \underline{t}_2(x, t)] \otimes \underline{e}_2(0) + [\underline{\mathbf{w}} \wedge \underline{t}_3(x, t)] \otimes \underline{e}_3(0) \\ &\quad + [\underline{\dot{\omega}}(x, t) \wedge [y \underline{t}_2(x, t) + z \underline{t}_3(x, t)] + \underline{\omega}(x, t) \wedge [\underline{\mathbf{w}} \wedge [y \underline{t}_2(x, t) + z \underline{t}_3(x, t)]]] \otimes \underline{e}_1(0) \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t} \begin{bmatrix} 1 + u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} \cdot \{e(t)\} \end{matrix} \right\} \right] \otimes \underline{e}_1(0). \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \underline{\mathbf{w}} \cdot \{ \underline{t}_2(x, t) \wedge \mathbf{T}_2 + \underline{t}_3(x, t) \wedge \mathbf{T}_3 \} \\ &\quad + \mathbf{T}_1 \cdot \{ \underline{\dot{\omega}}(x, t) \wedge [\underline{\mathbf{w}} \wedge [y \underline{t}_2(x, t) + z \underline{t}_3(x, t)]] \} \\ &\quad + \{ [y \underline{t}_2(x, t) + z \underline{t}_3(x, t)] \wedge \mathbf{T}_1 \} \cdot \underline{\dot{\omega}}(x, t) \\ &\quad + \mathbf{T}_1 \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t} \begin{bmatrix} 1 + u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} \cdot \{e(t)\} \end{matrix} \right\} \right] \end{aligned}$$

Or la déformation  $\Phi(x, y, z, t)$  vérifie l'équation :

$$(1.11) \quad \operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \underline{f} = \rho \ddot{\Phi},$$

qui traduit la conservation de la quantité de mouvement dans la théorie classique tridimensionnelle.

Dans le cas qui nous occupe, une des conséquences de l'équation (1.11) est la relation :

$$\Phi' \wedge \mathbf{T}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \wedge \mathbf{T}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \wedge \mathbf{T}_3 = 0.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{w}} \cdot \{ \underline{t}_2(x, t) \wedge \mathbf{T}_2 + \underline{t}_3(x, t) \wedge \mathbf{T}_3 \} &= \underline{\mathbf{w}} \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \wedge \mathbf{T}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \wedge \mathbf{T}_3 \right\} \\ &= -\underline{\mathbf{w}} \cdot \{ \Phi' \wedge \mathbf{T}_1 \} \\ &= -\mathbf{T}_1 \cdot \{ \underline{\mathbf{w}} \wedge \Phi' \} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{w}} \cdot \{ \underline{t}_2(x, t) \wedge \mathbf{T}_2 + \underline{t}_3(x, t) \wedge \mathbf{T}_3 \} \\ & \simeq -\mathbf{T}_1 \cdot \left[ \underline{\mathbf{w}} \wedge \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t} \begin{bmatrix} 1 + u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} \cdot \{e(t)\} + \underline{\omega}(x, t) \wedge [y \underline{t}_2(x, t) + z \underline{t}_3(x, t)] \end{array} \right\} \right] \end{aligned}$$

En faisant appel à l'identité :

$$\forall (\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3 : \underline{u} \wedge [\underline{v} \wedge \underline{w}] - \underline{v} \wedge [\underline{u} \wedge \underline{w}] = [\underline{u} \wedge \underline{v}] \wedge \underline{w},$$

on peut alors réécrire l'équation (1.10) sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{T}_1 \cdot \{ \{ \underline{\omega}(x, t) \wedge \underline{\mathbf{w}} \} \wedge [y \underline{t}_2(x, t) + z \underline{t}_3(x, t)] \} \\ &+ \{ [y \underline{t}_2(x, t) + z \underline{t}_3(x, t)] \wedge \mathbf{T}_1 \} \cdot \underline{\omega}(x, t) \\ &+ \mathbf{T}_1 \cdot \mathcal{D} \left( \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t} \begin{bmatrix} 1 + u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} \cdot \{e(t)\} \end{array} \right\} \right), \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \{ \{ \Phi(x, y, z, t) - \Phi(x, 0, 0, t) \} \wedge \mathbf{T}_1 \} \cdot \mathcal{D}(\underline{\omega}(x, t)) \\ &+ \mathbf{T}_1 \cdot \mathcal{D} \left( \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t} \begin{bmatrix} 1 + u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} \cdot \{e(t)\} \end{array} \right\} \right), \end{aligned}$$

soit enfin, en utilisant (1.9) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \{ \{ \Phi(x, y, z, t) - \Phi(x, 0, 0, t) \} \wedge \mathbf{T}_1 \} \cdot \mathcal{D}(\underline{\omega}(x, t)) \\ &+ \mathbf{T}_1 \cdot \mathcal{D}(\underline{\gamma}(x, t)). \end{aligned}$$

La relation (1.8) vient alors des définitions (1.5) et (1.6).

□

Nous introduisons maintenant les densités  $\underline{X}^m$  et  $\underline{\Gamma}^m$  d'efforts et de moments intérieurs :

$$\begin{aligned} (1.12) \quad \underline{X} &= \Lambda \underline{X}^m \\ \underline{\Gamma} &= \Lambda \underline{\Gamma}^m \end{aligned}$$

Les densités  $\underline{X}^m$  et  $\underline{\Gamma}^m$  sont les équivalents *matériels*, c'est à dire repérés dans la configuration de référence, des densités  $\underline{X}$  et  $\underline{\Gamma}$  qui sont des densités *spatiales*, c'est

à dire repérées dans la configuration courante (**Simo** [1985]).

De même, nous introduisons les quantités matérielles  $\underline{\gamma}^m$  et  $\underline{\omega}^m$  :

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \underline{\gamma} &= \Lambda \underline{\gamma}^m \\ \underline{\omega} &= \Lambda \underline{\omega}^m \end{aligned}$$

On montre alors la relation :

$$\int_0^l \underline{X}(x, t) \cdot \mathcal{D}(\underline{\gamma}(x, t)) + \underline{\Gamma}(x, t) \cdot \mathcal{D}(\underline{\omega}(x, t)) dx = \int_0^l \underline{X}^m(x, t) \cdot \dot{\underline{\gamma}}^m(x, t) + \underline{\Gamma}^m(x, t) \cdot \dot{\underline{\omega}}^m(x, t) dx,$$

et donc :

$$(1.14) \quad \Pi \approx \int_0^l \underline{X}^m(x, t) \cdot \dot{\underline{\gamma}}^m(x, t) + \underline{\Gamma}^m(x, t) \cdot \dot{\underline{\omega}}^m(x, t) dx.$$

Une conséquence de la relation (1.14) est que l'on doit chercher les densités linéiques d'efforts et de moments intérieurs matériels sous la forme :

$$\underline{X}^m = \frac{\partial w^e}{\partial \underline{\gamma}^m}(x, \underline{\gamma}^m, \underline{\omega}^m)$$

$$\underline{\Gamma}^m = \frac{\partial w^e}{\partial \underline{\omega}^m}(x, \underline{\gamma}^m, \underline{\omega}^m)$$

où  $w^e$  est une densité linéique admissible d'énergie élastique, c'est à dire soumise à des conditions d'invariance par rapport aux mouvements rigides. Grâce notamment à l'invariance des déformations matérielles  $\underline{\gamma}^m$  et  $\underline{\omega}^m$  par rapport aux mouvements rigides (**Simo & Vu-Quoc** [1986.1]), un choix possible (**Simo** [1985]) pour la densité d'énergie  $w^e$  est celui d'une densité d'énergie quadratique dans les variables  $\underline{\gamma}^m$  et  $\underline{\omega}^m$ . Plus précisément, nous prendrons, suivant en cela **Simo & Vu-Quoc** [1986.2] et en négligeant le gauchissement des sections droites :

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w^e}{\partial \underline{\gamma}^m \partial \underline{\gamma}^m} &= \text{Diag}[ES, GS_2, GS_3], \\ \frac{\partial^2 w^e}{\partial \underline{\omega}^m \partial \underline{\omega}^m} &= \text{Diag}[GJ, EI_2, EI_3], \\ \frac{\partial^2 w^e}{\partial \underline{\omega}^m \partial \underline{\gamma}^m} &= \frac{\partial^2 w^e}{\partial \underline{\gamma}^m \partial \underline{\omega}^m}, \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

D'après les définitions des quantités matérielles (par exemple (1.12) ou (1.13)), on constate que les coordonnées dans la base  $\{e(0)\}$  d'un vecteur matériel sont identiques aux coordonnées dans la base  $\{t\}$  du vecteur spatial associé. Avec le choix

d'énergie (1.15), nous adopterons donc la loi de comportement suivante :

$$\begin{aligned}\{\underline{X} \cdot \underline{t}_i\}_{i=1,2,3} &= \text{Diag}[ES, GS_2, GS_3] \cdot \{\underline{\gamma} \cdot \underline{t}_i\}_{i=1,2,3} \\ \{\underline{\Gamma} \cdot \underline{t}_i\}_{i=1,2,3} &= \text{Diag}[GJ, EI_2, EI_3] \cdot \{\underline{\omega} \cdot \underline{t}_i\}_{i=1,2,3}\end{aligned}$$

On montre qu'avec la cinématique (1.1), et en négligeant les produits de quantités infinitésimales, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\underline{\gamma}(x, t) &= u'_1 \underline{e}_1(t) + (u'_2 - \theta_3) \underline{e}_2(t) + (u'_3 + \theta_2) \underline{e}_3(t) \\ &= (1 + u'_1) \underline{e}_1(t) + u'_2 \underline{e}_2(t) + u'_3 \underline{e}_3(t) - \underline{t}_1 \\ &\approx u'_1 \underline{t}_1 + (u'_2 - \theta_3) \underline{t}_2 + (u'_3 + \theta_2) \underline{t}_3 \\ \underline{\omega}(x, t) &\approx \theta'_1 \underline{t}_1 + \theta'_2 \underline{t}_2 + \theta'_3 \underline{t}_3\end{aligned}$$

On en déduit la loi de comportement :

$$\begin{cases} \underline{X} &= ES u'_1 \underline{t}_1 + GS_2 (u'_2 - \theta_3) \underline{t}_2 + GS_3 (u'_3 + \theta_2) \underline{t}_3, \\ \underline{\Gamma} &= GJ \theta'_1 \underline{e}_1 + EI_2 \theta'_2 \underline{e}_2 + EI_3 \theta'_3 \underline{e}_3, \end{cases}$$

que l'on peut également écrire de façon approchée :

$$(1.16) \quad \begin{cases} \underline{X} &\approx ES u'_1 \underline{e}_1(t) + GS_2 (u'_2 - \theta_3) \underline{e}_2(t) + GS_3 (u'_3 + \theta_2) \underline{e}_3(t), \\ \underline{\Gamma} &\approx GJ \theta'_1 \underline{e}_1(t) + EI_2 \theta'_2 \underline{e}_2(t) + EI_3 \theta'_3 \underline{e}_3(t). \end{cases}$$

On peut alors formuler les équations (1.7) en termes de déplacement. Les six équations obtenues sont ainsi :

$$(1.17) \quad \begin{aligned}ES u''_1 + f_1 &= \rho S \{ \ddot{T}_1 R_{[1,1]} + \ddot{T}_2 R_{[1,2]} + \ddot{T}_3 R_{[1,3]} \\ &\quad + \ddot{u}_1 + 2(\dot{u}_3 w_2 - \dot{u}_2 w_3) - (w_2^2 + w_3^2)(x + u_1) \\ &\quad + (-\dot{w}_3 + w_1 w_2) u_2 + (\dot{w}_2 + w_1 w_3) u_3 \}\end{aligned}$$

$$(1.18) \quad \begin{aligned}GS_2 (u''_2 - \theta'_3) + f_2 &= \rho S \{ \ddot{T}_1 R_{[2,1]} + \ddot{T}_2 R_{[2,2]} + \ddot{T}_3 R_{[2,3]} + \ddot{u}_2 + 2(\dot{u}_1 w_3 - \dot{u}_3 w_1) \\ &\quad + (\dot{w}_3 + w_1 w_2)(x + u_1) + (-\dot{w}_1 + w_2 w_3) u_3 - (w_3^2 + w_1^2) u_2 \}\end{aligned}$$

$$(1.19) \quad \begin{aligned}GS_3 (u''_3 + \theta'_2) + f_3 &= \rho S \{ \ddot{T}_1 R_{[3,1]} + \ddot{T}_2 R_{[3,2]} + \ddot{T}_3 R_{[3,3]} + \ddot{u}_3 + 2(\dot{u}_2 w_1 - \dot{u}_1 w_2) \\ &\quad + (-\dot{w}_2 + w_1 w_3)(x + u_1) + (\dot{w}_1 + w_2 w_3) u_2 - (w_2^2 + w_1^2) u_3 \}\end{aligned}$$

$$(1.20) \quad \begin{aligned}GJ \theta''_1 &= \rho \{ J (\ddot{\theta}_1 + \dot{w}_1) + 2(I_3 w_2 \dot{\theta}_3 - I_2 w_3 \dot{\theta}_2) \\ &\quad + (\dot{w}_2 - w_1 w_3) I_3 \theta_3 - (\dot{w}_3 + w_1 w_2) I_2 \theta_2 \\ &\quad + (I_3 - I_2) w_2 w_3 + (I_2 - I_3) (w_2^2 - w_3^2) \theta_1 \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_2 \theta_2'' - GS_3 (u_3' + \theta_2) &= \rho \{ I_2 \ddot{\theta}_2 + 2 w_3 I_2 \dot{\theta}_1 \\
(1.21) \quad &+ I_2 (\dot{w}_2 + w_1 w_3) + I_2 \theta_2 (w_1^2 - w_3^2) \\
&+ I_3 \theta_3 (\dot{w}_1 + w_2 w_3) + (I_2 - I_3) \theta_1 (\dot{w}_3 - w_1 w_2) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_3 \theta_3'' + GS_2 (u_2' - \theta_3) &= \rho \{ I_3 \ddot{\theta}_3 - 2 w_2 I_3 \dot{\theta}_1 \\
(1.22) \quad &+ I_3 (\dot{w}_3 - w_1 w_2) + I_3 \theta_3 (w_1^2 - w_2^2) \\
&+ I_2 \theta_2 (-\dot{w}_1 + w_2 w_3) + (I_2 - I_3) \theta_1 (\dot{w}_2 + w_1 w_3) \}
\end{aligned}$$

Nous nous limitons aux mouvements satisfaisant la condition de Navier-Bernoulli :

$$(1.23) \forall t \in [0, T] \quad \forall x \in [0, l] : \quad \theta_2(x, t) \underline{e}_2(t) + \theta_3(x, t) \underline{e}_3(t) \approx \underline{e}_1(t) \wedge \underline{u}'(x, t)$$

et nous éliminons les efforts de cisaillement dans les équations (1.7) pour obtenir la forme finale des équations du mouvement :

$$\begin{aligned}
GJ \theta_1'' &= \rho \{ J (\ddot{\theta}_1 + \dot{w}_1) + 2 (I_3 w_2 \dot{u}_2' + I_2 w_3 \dot{u}_3') \\
(1.24) \quad &+ (\dot{w}_2 - w_1 w_3) I_3 u_2' + (\dot{w}_3 + w_1 w_2) I_2 u_3' \\
&+ (I_3 - I_2) w_2 w_3 + (I_2 - I_3) (w_2^2 - w_3^2) \theta_1 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ES u_1'' + f_1 &= \rho S \{ \ddot{T}_1 R_{[1,1]} + \ddot{T}_2 R_{[1,2]} + \ddot{T}_3 R_{[1,3]} \\
(1.25) \quad &+ \ddot{u}_1 + 2(\dot{u}_3 w_2 - \dot{u}_2 w_3) - (w_2^2 + w_3^2)(x + u_1) \\
&+ (-\dot{w}_3 + w_1 w_2) u_2 + (\dot{w}_2 + w_1 w_3) u_3 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-EI_3 u_2'''' + f_2 &= \rho S \{ \ddot{T}_1 R_{[2,1]} + \ddot{T}_2 R_{[2,2]} + \ddot{T}_3 R_{[2,3]} + \ddot{u}_2 + 2(\dot{u}_1 w_3 - \dot{u}_3 w_1) \\
(1.26) \quad &+ (\dot{w}_3 + w_1 w_2)(x + u_1) + (-\dot{w}_1 + w_2 w_3) u_3 - (w_3^2 + w_1^2) u_2 \} \\
&- \rho \{ I_3 \ddot{u}_2'' - 2 w_2 I_3 \dot{\theta}_1' + I_3 u_2'' (w_1^2 - w_2^2) - I_2 u_3'' (-\dot{w}_1 + w_2 w_3) \\
&+ (I_2 - I_3) \theta_1' (\dot{w}_2 + w_1 w_3) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-EI_2 u_3'''' + f_3 &= \rho S \{ \ddot{T}_1 R_{[3,1]} + \ddot{T}_2 R_{[3,2]} + \ddot{T}_3 R_{[3,3]} + \ddot{u}_3 + 2(\dot{u}_2 w_1 - \dot{u}_1 w_2) \\
(1.27) \quad &+ (-\dot{w}_2 + w_1 w_3)(x + u_1) + (\dot{w}_1 + w_2 w_3) u_2 - (w_2^2 + w_1^2) u_3 \} \\
&+ \rho \{ -I_2 \ddot{u}_3'' + 2 w_3 I_2 \dot{\theta}_1' - I_2 u_3'' (w_1^2 - w_3^2) + I_3 u_2'' (\dot{w}_1 + w_2 w_3) \\
&+ (I_2 - I_3) \theta_1' (\dot{w}_3 - w_1 w_2) \}
\end{aligned}$$

## 1.3 Conditions aux limites et de jonction

### 1.3.1 Conditions aux limites

La première poutre de la chaîne est encastree en  $x_1 = 0$ . Nous avons donc les conditions aux limites :

$$(1.28) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0, T] \quad \underline{u}^1(0, t) &\equiv 0, \\ \theta^1(0, t) &= 0, \\ [u_2^1]'(0, t) &= 0, \\ [u_3^1]'(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

La compatibilité avec les efforts extérieurs se traduit par la relation :

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0, T] \quad E^{nt} S^{nt} [u_1^{nt}]'(l_{nt}, t) &= \mathcal{F}_1(t), \\ E^{nt} I_2^{nt} [u_3^{nt}]'''(l_{nt}, t) &= -\mathcal{F}_3(t), \\ E^{nt} I_3^{nt} [u_2^{nt}]'''(l_{nt}, t) &= -\mathcal{F}_2(t), \\ \underline{\Gamma}^{nt}(l_{nt}, t) &\equiv \mathcal{M}(t). \end{aligned}$$

### 1.3.2 Modèle de jonction

Nous postulons la continuité des déplacements élastiques et des efforts intérieurs aux jonctions entre les poutres de la chaîne. Nous écrivons donc :

$$(1.30) \quad \forall t \in [0, T], \forall i = 1 \cdots nt - 1 \quad \underline{u}^i(l_i, t) \equiv \underline{u}^{i+1}(0, t),$$

$$(1.31) \quad \forall t \in [0, T], \forall i = 1 \cdots nt - 1 \quad \underline{X}^i(l_i, t) \equiv \underline{X}^{i+1}(0, t).$$

En ce qui concerne les rotations et les moments aux jonctions, nous postulons l'existence d'une suite  $\{(k_1^i, k_2^i, k_3^i)\}_{i=1, \dots, nt-1}$  de constantes strictement positives telles que :

$$(1.32) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0, T], \forall i = 1, \dots, nt - 1 : \quad \underline{\Gamma}^i(l_i, t) &\equiv \underline{\Gamma}^{i+1}(0, t) \\ &\equiv - \sum_{j=1}^3 \{k_j^i (\underline{\theta}^i(l_i, t) - \underline{\theta}^{i+1}(0, t)) \cdot \underline{e}_j^i(t)\} \underline{e}_j^i(t) \end{aligned}$$

## 1.4 Formulation variationnelle

### 1.4.1 Cadre fonctionnel

Nous introduisons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} V_1^1 &= \{v \in H^1[0, l_1], v(0) = 0\} \\ V_2^1 &= \{v \in H^2[0, l_1], v(0) = 0, v'(0) = 0\} \\ V^1 &= V_1^1 \times V_1^1 \times V_2^1 \times V_2^1 \end{aligned}$$

ainsi que pour tout indice  $i > 1, i \leq nt$  :

$$\begin{aligned} V_1^i &= \{v \in H^1[0, l_i]\} \\ V_2^i &= \{v \in H^2[0, l_i]\} \\ V^i &= V_1^i \times V_1^i \times V_2^i \times V_2^i \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} V &= \{(\Psi, \vec{W}) = ((\psi_1^1, \underline{w}^1), \dots, (\psi_1^{nt}, \underline{w}^{nt})) \in V^1 \times \dots \times V^{nt} \text{ tel que :} \\ &\forall i = 1 \dots nt - 1 : \underline{w}^i(l_i) = \underline{w}^{i+1}(0)\} \end{aligned}$$

$$H_i = L^2[0, l_i] \times L^2[0, l_i] \times H^1[0, l_i] \times H^1[0, l_i]$$

$$H = \prod_{i=1}^{nt} H_i$$

On remarque (**Lions & Magenes** [1968]) que l'on a les injections **denses** :

$$\begin{aligned} V &\hookrightarrow H \\ H' &\hookrightarrow V' \end{aligned}$$

où  $V'$  est le dual de  $V$  et  $H'$  est le dual de  $H$ . Les espaces  $V$  et  $H$  étant des espaces de Hilbert, on fait l'identification classique de  $H$  et de son dual, et on est donc dans la situation :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

avec injections denses.

On introduit les produits scalaires sur  $V$  et  $H$  :

$$\begin{aligned} \langle (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}) \rangle_V &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} u_1^i v_1^i + [u_1^i]' [v_1^i]' + \theta_1^i \phi_1^i + [\theta_1^i]' [\phi_1^i]' \\ &\quad + u_2^i v_2^i + [u_2^i]' [v_2^i]' + [u_2^i]'' [v_2^i]'' + u_3^i v_3^i + [u_3^i]' [v_3^i]' + [u_3^i]'' [v_3^i]'' dx^i \\ \langle (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}) \rangle_H &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} u_1^i v_1^i + \theta_1^i \phi_1^i + u_2^i v_2^i + u_3^i v_3^i + [u_2^i]' [v_2^i]' + [u_3^i]' [v_3^i]' dx^i \end{aligned}$$

ainsi que les normes  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_H$  associées à ces produits scalaires.



### 1.4.2 Formulation variationnelle

On multiplie les équations du mouvement (1.25) à (1.27) par un élément  $(\Phi, \bar{V})$  de  $V$ . Après intégration par parties, on obtient pour chaque indice  $i$  :

$$(1.33) \quad -\int_0^{l_i} E^i S^i [u_1^i]' [v_1^i]' dx_i + [X_1^i v_1^i]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} f_1^i v_1^i dx_i = \\ \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{\ddot{T}_j^i R_{[1,j]}^i + \ddot{u}_1^i + 2(\dot{u}_3^i w_2^i - \dot{u}_2^i w_3^i) - ((w_2^i)^2 + (w_3^i)^2)(x_i + u_1^i) \\ + (-\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) u_2^i + (\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) u_3^i\} v_1^i dx_i$$

$$(1.34) \quad -\int_0^{l_i} \mu^i J^i [\theta_1^i]' [\phi_1^i]' dx_i + [\Gamma_1^i \phi_1^i]_0^{l_i} = \rho^i \int_0^{l_i} \{J^i \ddot{\theta}_1^i + w_2^i I_3^i [\dot{u}_2^i]' + w_3^i I_2^i [\dot{u}_3^i]' \\ + (\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) I_2^i [u_3^i]' + (\dot{w}_2^i - w_1^i w_3^i) I_3^i [u_2^i]' \\ + (I_3^i - I_2^i) w_2^i w_3^i + (I_2^i - I_3^i)((w_2^i)^2 - (w_3^i)^2) \theta_1^i \\ + J^i \dot{w}_1^i\} \phi_1^i dx_i$$

$$(1.35) \quad -\int_0^{l_i} E^i I_3^i [u_2^i]'' [v_2^i]'' dx_i + [\Gamma_3^i [v_2^i]']_0^{l_i} + [X_2^i v_2^i]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} f_2^i v_2^i dx_i = \\ \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{\ddot{T}_j^i R_{[2,j]}^i + \ddot{u}_2^i + 2(\dot{u}_1^i w_3^i - \dot{u}_3^i w_1^i) \\ + (\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i)(x_i + u_1^i) + (-\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) u_3^i - ((w_3^i)^2 + (w_1^i)^2) u_2^i\} v_2^i dx_i \\ + \rho^i \int_0^{l_i} \{I_3^i [\ddot{u}_2^i]' - 2 w_2^i I_3^i \dot{\theta}_1^i + I_3^i (\dot{w}_3^i - w_1^i w_2^i) + I_3^i [u_2^i]' ((w_1^i)^2 - (w_2^i)^2) \\ - I_2^i [u_3^i]' (-\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) + (I_2^i - I_3^i) \theta_1^i (\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i)\} [v_2^i]' dx_i$$

$$(1.36) \quad -\int_0^{l_i} E^i I_2^i [u_3^i]'' [v_3^i]'' dx_i + [-\Gamma_2^i [v_3^i]']_0^{l_i} + [X_3^i v_3^i]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} f_3^i v_3^i dx_i = \\ \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{\ddot{T}_j^i R_{[3,j]}^i + \ddot{u}_3^i + 2(\dot{u}_2^i w_1^i - \dot{u}_1^i w_2^i) \\ + (-\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i)(x_i + u_1^i) + (\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) u_2^i - ((w_2^i)^2 + (w_1^i)^2) u_3^i\} v_3^i dx_i \\ - \rho^i \int_0^{l_i} \{-I_2^i [\ddot{u}_3^i]' + 2 w_3^i I_2^i \dot{\theta}_1^i + I_2^i (\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) - I_2^i [u_3^i]' ((w_1^i)^2 - (w_3^i)^2) \\ + I_3^i [u_2^i]' (\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) + (I_2^i - I_3^i) \theta_1^i (\dot{w}_3^i - w_1^i w_2^i)\} [v_3^i]' dx_i$$

On effectue ensuite la sommation sur  $i$  des équations (1.33) à (1.36), en se servant des conditions aux limites (1.28), des conditions de raccord (1.30), (1.31) et (1.32) ainsi que des conditions de compatibilité (1.29). Si l'on se donne des conditions initiales appropriées  $\underline{f}_0 \in V$  et  $\underline{g}_0 \in H$ , nous aboutissons à une formulation variationnelle du

type :

$$\begin{aligned}
 & \text{Étant donnés les vecteurs } \underline{f}_0 \in V \text{ et } \underline{g}_0 \in H \\
 & \text{Trouver } (\Theta, \vec{U}) \in L^2(0, T; V) \text{ tel que :} \\
 & \text{i) } (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}}) \in L^2(0, T; V) \\
 & \text{ii) } \forall (\Phi, \vec{V}) \in V : \\
 & \quad \frac{d}{dt} c((\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}}), (\Phi, \vec{V})) + b((\cdot), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}}), (\Phi, \vec{V})) \\
 & \quad + a((\cdot), (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) = \langle \underline{F}(\cdot), (\Phi, \vec{V}) \rangle_V \\
 & \text{au sens de } \mathcal{D}'([0; T]) \\
 & \text{iii) } (\Theta, \vec{U})(t=0) = \underline{f}_0 \\
 & \text{iv) } (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})(t=0) = \underline{g}_0
 \end{aligned}
 \tag{1.37}$$

### 1.4.3 Existence et unicité

Nous énonçons d'abord un théorème *abstrait* d'existence et d'unicité pour le problème (1.37), qui est une variante d'un résultat énoncé dans **Artola, Cessenat, Dautray, Lions & Scheurer** [1988.8] (p. 667 et suivantes).

**Théorème 1.4.1** *Sous les hypothèses :*

1)  $\forall t \in [0, T] : a(t, (\cdot), (\cdot))$  est continue de  $V \times V$  vers  $\mathbb{R}$ ,

2)  $a((\cdot), (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) = a_0((\cdot), (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) + a_1((\cdot), (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))$  avec :

2.1.i) la fonction  $t \rightarrow a_0(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))$  est une fois continûment différentiable dans  $[0, T]$ ,

2.1.ii)  $\forall ((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) \in V \times V, \forall t \in [0, T] : a_0(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) = a_0(t, (\Phi, \vec{V}), (\Theta, \vec{U}))$ ,

2.1.iii) il existe un réel  $\lambda$  et un réel strictement positif  $\alpha$  tels que :

$$\forall (\Theta, \vec{U}) \in V, \forall t \in [0, T] : a_0(t, (\Theta, \vec{U}), (\Theta, \vec{U})) \geq \alpha \|(\Theta, \vec{U})\|_V^2 - \lambda \|(\Theta, \vec{U})\|_H^2,$$

2.2.i) la fonction  $t \rightarrow a_1(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))$  est continue dans  $[0, T]$ ,

2.2.ii) il existe un réel strictement positif  $c_1$  tel que :

$$\forall ((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) \in V \times V, \forall t \in [0, T] : |a_1(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))| \leq c_1 \|(\Theta, \vec{U})\|_V \|(\Phi, \vec{V})\|_H.$$

3)  $\forall t \in [0, T] : b(t, (\cdot), (\cdot))$  est continue de  $V \times V$  vers  $\mathbb{R}$ ,

3.i) la fonction  $t \rightarrow b(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))$  est continue dans  $[0, T]$ ,

3.ii) il existe un réel strictement positif  $c_2$  tel que :

$$\forall ((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) \in V \times V, \forall t \in [0, T] : |b(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))| \leq c_2 \|(\Theta, \vec{U})\|_H \|(\Phi, \vec{V})\|_H,$$

4)  $c((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) = (C \cdot (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))$  avec :

4.i)  $C$  est une application linéaire sur  $H$ ,

4.ii)  $\forall ((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) \in H \times H, \forall t \in [0, T] : c(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) = c(t, (\Phi, \vec{V}), (\Theta, \vec{U}))$ ,

4.iii) il existe un réel  $\gamma$  strictement positif tel que :

$$\forall (\Theta, \vec{U}) \in H : (C \cdot (\Theta, \vec{U}), (\Theta, \vec{U})) \geq \gamma \|(\Theta, \vec{U})\|_H^2,$$

5)  $\underline{F} \in L^2(0, T; H)$ ,

le problème (1.37) admet une solution unique

Démonstration :

**Démonstration de l'unicité**

Soit  $(\Theta, \vec{U})$  une solution du problème (1.37) correspondant à  $\underline{f}_0 \equiv 0$ ,  $\underline{g}_0 \equiv 0$  et  $\underline{F} \equiv 0$ . Il est suffisant de montrer que  $(\Theta, \vec{U}) \equiv 0$ .

On montre que, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$2 \int_0^t \left( \frac{d}{d\sigma} [C((\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}}))(\sigma), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})(\sigma)] d\sigma = c((\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})(t), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})(t)), \right.$$

$$\begin{aligned}
2 \int_0^t \left( \frac{d}{d\sigma} [a_0(\sigma; (\dot{\Theta}, \vec{U}))(\sigma), (\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma)] d\sigma \right) &= a_0(t; (\Theta, \vec{U})(t), (\Theta, \vec{U})(t)) \\
&- \int_0^t \frac{d}{d\sigma} a_0(\sigma; (\Theta, \vec{U})(\sigma), (\Theta, \vec{U})(\sigma)) d\sigma.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$(1.38) \quad \left\{ \begin{aligned} &c((\dot{\Theta}, \vec{U})(t), (\dot{\Theta}, \vec{U})(t)) + a_0(t; (\Theta, \vec{U})(t), (\Theta, \vec{U})(t)) \\ &= -2 \int_0^t a_1(\sigma; (\Theta, \vec{U})(\sigma), (\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma)) d\sigma \\ &+ \int_0^t \frac{d}{d\sigma} a_0(\sigma; (\Theta, \vec{U})(\sigma), (\Theta, \vec{U})(\sigma)) d\sigma \\ &- 2 \int_0^t b(\sigma; (\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma), (\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma)) d\sigma ; \end{aligned} \right.$$

En utilisant 2.1.i), 2.2.ii) et l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$ , on peut conclure à l'existence d'une constante  $M > 0$  telle que :

$$\left\{ \begin{aligned} &| -2 \int_0^t a_1(\sigma; (\Theta, \vec{U})(\sigma), (\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma)) d\sigma + \int_0^t \frac{d}{d\sigma} a_0(\sigma; (\Theta, \vec{U})(\sigma), (\Theta, \vec{U})(\sigma)) d\sigma | \\ &\leq M \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \right.$$

où :

$$\Phi(\sigma) = \|(\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma)\|_H^2 + \|(\Theta, \vec{U})(\sigma)\|_V^2,$$

et par utilisation de 3.ii) :

$$\left| \int_0^t 2 b(\sigma; (\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma), (\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma)) d\sigma \right| \leq 2 c_2 \int_0^t \|(\dot{\Theta}, \vec{U})(\sigma)\|_H^2 d\sigma$$

Le second membre de (1.38) est donc majoré par :

$$(M + 2 c_2) \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma$$

En utilisant 2.1.iii) et 4.ii), on minore le premier membre de (1.38) par :

$$\gamma \|(\dot{\Theta}, \vec{U})(t)\|_H^2 + \alpha \|(\Theta, \vec{U})(t)\|_V^2 - \delta \|(\Theta, \vec{U})(t)\|_H^2 ;$$

et on en déduit :

$$\min(\gamma, \alpha) \cdot \Phi(t) \leq \delta \|(\Theta, \vec{U})(t)\|_H^2 + (M + 2 c_2) \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma.$$

Nous avons, pour tout  $(\Theta, \vec{U})$  dans  $H$

$$(\Theta, \vec{U})(t) = \int_0^t (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})(\sigma) d\sigma.$$

On en déduit :

$$\|(\Theta, \vec{U})(t)\|_H^2 \leq t \int_0^t \|(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})(\sigma)\|_H^2 d\sigma \leq T \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma,$$

ce qui donne,  $M_1$  étant une constante strictement positive,

$$\Phi(t) \leq M_1 \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma.$$

Le Lemme de Gronwall implique

$$\Phi(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

ce qui entraîne l'unicité.

### Existence d'une solution

- Etape n° 1. Problème approché.

Soit  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$  une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie, chacun des  $V_m$  réalisant une approximation de Galerkin d'ordre  $m$  de  $V$ .

On peut montrer qu'il existe deux suites

$$\begin{cases} \underline{f}_m \in V_m, \underline{f}_m \rightarrow \underline{f}_0 & \text{dans } V \\ \underline{g}_m \in V_m, \underline{g}_m \rightarrow \underline{g}_0 & \text{dans } H. \end{cases}$$

On note

$$d_m = \dim V_m, \{W_{jm}\}, j = 1, \dots, d_m, \text{ une base de } V_m.$$

Le problème approché est alors :

$$(1.39) \quad \begin{array}{l} \text{Trouver} \\ (\Theta, \vec{U})_m(t) = \sum_{j=1}^{d_m} g_{jm}(t) W_{jm} \\ \text{vérifiant} \\ \frac{d}{dt} c((\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m, W_{jm}) + b(t; (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m, W_{jm}) \\ + a(t; (\Theta, \vec{U})_m, W_{jm}) = (\underline{F}(t), W_{jm}) \quad 1 \leq j \leq d_m \\ (\Theta, \vec{U})_m(0) = \underline{f}_m, (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(0) = \underline{g}_m. \end{array}$$

**Remarque (Artola, Cessenat, Dautray, Lions & Scheurer [1988.8] p. 675) :**  
*Ce système linéaire peut se ramener à un système du premier ordre qui admet une solution unique.*

Il existe donc une solution unique au problème (1.39) vérifiant

$$(\Theta, \vec{U})_m \in C^0([0, T]; V_m), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m \in C^0([0, T]; V_m), (\ddot{\Theta}, \ddot{\vec{U}})_m \in L^2(0, T; V_m).$$

• Etape n° 2. Estimations a priori.

On multiplie les deux membres de l'équation (1.39) par  $\dot{g}_{jm}(t)$  et on somme sur  $j$  de 1 à  $d_m$ . Il vient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} [C \cdot (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t)], (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t) \right) + b(t; (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t)) \\ & + a(t; (\Theta, \vec{U})_m(t), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t)) = (\underline{F}, (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t)) \end{aligned}$$

soit en intégrant de 0 à  $t$  la relation précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} c((\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t)) + a_0(t; (\Theta, \vec{U})_m(t), (\Theta, \vec{U})_m(t)) d\sigma \\ = c(\underline{g}_m, \underline{g}_m) + a_0(0; \underline{f}_m, \underline{f}_m) - 2 \int_0^t a_1(\sigma; (\sigma); (\Theta, \vec{U})_m, (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)) d\sigma \\ + \int_0^t \frac{d}{d\sigma} a_0(\sigma; (\Theta, \vec{U})_m(\sigma), (\Theta, \vec{U})_m(\sigma)) d\sigma \\ - 2 \int_0^t b_1(\sigma; (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)) d\sigma + 2 \int_0^t (\underline{F}(\sigma), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)) d\sigma ; \end{array} \right.$$

Désignant par  $M$  des constantes strictement positives, nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} |c(\underline{g}_m, \underline{g}_m)| \leq M \|\underline{g}_m\|_H^2 \leq M \|\underline{g}\|_H^2 \\ |a_0(0; \underline{f}_m, \underline{f}_m)| \leq M \|\underline{f}_m\|_V^2 \leq M \|\underline{f}\|_V^2 \\ \left| \int_0^t 2(\underline{F}(\sigma), (\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)) d\sigma \right| \leq \int_0^T \|\underline{F}(\sigma)\|_H^2 d\sigma + \int_0^t \|(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)\|_H^2 d\sigma, \end{array} \right.$$

et en procédant comme pour la démonstration de l'unicité, en notant que :

$$\|(\Theta, \vec{U})_m(t)\|_H^2 \leq 2 \left[ \|\underline{f}_m\|_H^2 + t \int_0^t \|(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)\|_H^2 d\sigma \right] \leq M \left[ \|\underline{f}\|_V^2 + \int_0^t \|(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)\|_H^2 d\sigma \right].$$

on aboutit à

$$(1.40) \quad \inf(\gamma, \alpha) \Phi_m(t) \leq \mathcal{C} + M \int_0^t \Phi_m(\sigma) d\sigma,$$

avec

$$\Phi_m(\sigma) = \|(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(\sigma)\|_H^2 + \|(\Theta, \vec{U})_m(\sigma)\|_V^2$$

et où  $\mathcal{C}$  est une constante strictement positive dépendant des données  $\underline{f}_0, \underline{g}_0$  et  $\underline{F}$ .

De (1.40), on déduit d'abord, que

$$\Phi_m(t) \leq \mathcal{C}_1 + M_1 \int_0^t \Phi_m(\sigma) d\sigma,$$

ce qui, par l'utilisation du lemme de Gronwall, montre l'existence d'une constante  $K$  (indépendante de  $m$ ) telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} \|(\Theta, \vec{U})_m(t)\|_V \leq K \\ \sup_{t \in [0, T]} \|(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t)\|_H \leq K, \end{array} \right.$$

puis

$$\int_0^T \|(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m(t)\|_V^2 dt \leq K.$$

On en déduit le

**Lemme 1.4.1** *La solution  $(\Theta, \vec{U})_m$  du problème (1.39) reste dans un borné de  $L^\infty(0, T; V)$ , donc de  $L^2(0, T; V)$ . De même, la dérivée  $(\dot{\Theta}, \dot{\vec{U}})_m$  reste dans un borné de  $L^\infty(0, T; H)$  et de  $L^2(0, T; V)$ .*

On montre ensuite que l'on peut extraire de la suite  $\{(\Theta, \vec{U})_m\}_{m \in N^*}$  une sous-suite qui converge faiblement dans  $L^2(0, T; V)$  - et dont la limite faible est solution du problème continu (1.37). Cette démonstration est en tout point analogue à celle qui figure dans **Artola, Cessenat, Dautray, Lions & Scheurer** [1988.8] (p. 677 et suivantes) pour les problèmes d'évolution du second ordre en temps. Le lecteur est renvoyé à cet ouvrage pour plus de détails.

Nous vérifions maintenant que les hypothèses du théorème 1.4.1 sont valides pour le cas concret qui nous occupe et nous donnons pour cela l'expression des différents opérateurs intervenant dans le problème (1.37).

$$\begin{aligned}
\langle E(\cdot), (\Phi, \vec{V}) \rangle_V &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \underline{f}^i \underline{v}^i dx_i - \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{(\ddot{T}_j^i R_{[1,j]}^i - ((w_2^i)^2 + (w_3^i)^2)x_i) v_1^i \\
&\quad + (\ddot{T}_j^i R_{[2,j]}^i + (\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i)x_i) v_2^i + (\ddot{T}_j^i R_{[3,j]}^i + (-\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i)x_i) v_3^i\} dx_i \\
&\quad - \rho^i \int_0^{l_i} \{(J^i \dot{w}_1^i + (I_3^i - I_2^i)w_2^i w_3^i) \phi_1^i + I_3^i(\dot{w}_3^i - w_1^i w_2^i) [v_2^i]' \\
&\quad - I_2^i(\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) [v_3^i]'\} dx_i + \mathcal{F}(t) \cdot \underline{v}^{nt}(l_{nt}, t) \\
&\quad + \mathcal{M}_1(t) \phi_1^{nt}(l_{nt}, t) - \mathcal{M}_2(t) [v_3^{nt}]'(l_{nt}, t) + \mathcal{M}_3(t) [v_2^{nt}]'(l_{nt}, t)
\end{aligned}$$

(1.41)

$$\begin{aligned}
c((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \rho^i S^i \sum_{j=1}^3 u_j^i v_j^i + \rho^i \sum_{j=1}^2 I_j^i [u_j^i]' [v_j^i]' \\
&\quad + \rho^i J^i \theta_1^i \phi_1^i dx_i
\end{aligned}$$

(1.42)

$$\begin{aligned}
b(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} 2 \rho^i S^i \{(u_3^i w_2^i - u_2^i w_3^i) v_1^i + (u_1^i w_3^i - u_3^i w_1^i) v_2^i \\
&\quad + (u_2^i w_1^i - u_1^i w_2^i) v_3^i\} dx_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} 2 \rho^i \{(w_2^i I_3^i [u_2^i]' + w_3^i I_2^i [u_3^i]') \phi_1^i \\
&\quad - w_2^i I_3^i \theta_1^i [v_2^i]' - w_3^i I_2^i \theta_1^i [v_3^i]'\} dx_i
\end{aligned}$$

(1.43)



$$\begin{aligned}
& a(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) \\
&= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} E^i S^i [u_1^i]' [v_1^i]' dx_i \\
&+ \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{ -((w_2^i)^2 + (w_3^i)^2) u_1^i + (-\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) u_2^i + (\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) u_3^i \} v_1^i dx_i \\
&+ \int_0^{l_i} \mu^i J^i [\theta_1^i]' [\phi_1^i]' dx_i \\
&+ \rho^i \int_0^{l_i} \{ (\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) I_2^i [u_3^i]' + (\dot{w}_2^i - w_1^i w_3^i) I_3^i [u_2^i]' + (I_2^i - I_3^i)((w_2^i)^2 - (w_3^i)^2) \theta_1^i \} \phi_1^i dx_i \\
&+ \int_0^{l_i} E^i I_3^i [u_2^i]'' [v_2^i]'' dx_i + \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{ (\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) u_1^i + (-\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) u_3^i - ((w_3^i)^2 + (w_1^i)^2) u_2^i \} v_2^i dx_i \\
&+ \rho^i \int_0^{l_i} \{ I_3^i [u_2^i]' ((w_1^i)^2 - (w_2^i)^2) - I_2^i [u_3^i]' (-\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) + (I_2^i - I_3^i) \theta_1^i (\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) \} [v_2^i]' dx_i \\
&+ \int_0^{l_i} E^i I_2^i [u_3^i]'' [v_3^i]'' dx_i + \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{ (-\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) u_1^i + (\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) u_2^i - ((w_2^i)^2 + (w_1^i)^2) u_3^i \} v_3^i dx_i \\
&- \rho^i \int_0^{l_i} \{ -I_2^i [u_3^i]' ((w_1^i)^2 - (w_3^i)^2) + I_3^i [u_2^i]' (\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) + (I_2^i - I_3^i) \theta_1^i (\dot{w}_3^i - w_1^i w_2^i) \} [v_3^i]' dx_i \\
&+ \sum_{i=1}^{nt-1} \sum_{j=1}^3 k_j^i \Lambda_j^i(\Phi, \vec{V}) \Lambda_j^i(\Theta, \vec{U})
\end{aligned}$$

(1.44)

Nous faisons l'hypothèse préalable :

$$(1.45) \quad \forall i = 1, \dots, nt \quad \underline{w}^i \in H^3(0, T; \mathbb{R}^3), \quad \dot{\underline{w}}^i \in H^2(0, T; \mathbb{R}^3).$$

Nous avons d'après (1.44) :

$$\begin{aligned}
a_0(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} E^i S^i [u_1^i]' [v_1^i]' dx_i \\
&- \rho^i S^i \int_0^{l_i} ((w_2^i)^2 + (w_3^i)^2) u_1^i v_1^i dx_i + \int_0^{l_i} \mu^i J^i [\theta_1^i]' [\phi_1^i]' dx_i \\
&+ \rho^i \int_0^{l_i} (I_2^i - I_3^i)((w_2^i)^2 - (w_3^i)^2) \theta_1^i \phi_1^i dx_i + \int_0^{l_i} E^i I_3^i [u_2^i]'' [v_2^i]'' dx_i \\
&- \rho^i S^i \int_0^{l_i} ((w_3^i)^2 + (w_1^i)^2) u_2^i v_2^i dx_i \\
&+ \rho^i \int_0^{l_i} ((w_1^i)^2 - (w_2^i)^2) I_3^i [u_2^i]' [v_2^i]' dx_i + \int_0^{l_i} E^i I_2^i [u_3^i]'' [v_3^i]'' dx_i \\
&- \rho^i S^i \int_0^{l_i} ((w_2^i)^2 + (w_1^i)^2) u_3^i v_3^i dx_i \\
&+ \rho^i \int_0^{l_i} ((w_1^i)^2 - (w_3^i)^2) I_2^i [u_3^i]' [v_3^i]' dx_i + \sum_{i=1}^{nt-1} \sum_{j=1}^3 k_j^i \Lambda_j^i(\Phi, \vec{V}) \Lambda_j^i(\Theta, \vec{U})
\end{aligned}$$

L'hypothèse 2.1.ii) étant vérifiée, il reste à vérifier la coercivité 2.1.iii), la régularité 2.1.i) et la continuité de  $a_0(t, \cdot, \cdot)$  sur  $V \times V$ . Pour cela, nous introduisons l'opérateur :

$$\begin{aligned} a_s((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} E^i S^i [u_1^i]' [v_1^i]' + \mu^i J^i [\theta_1^i]' [\phi_1^i]' + E^i I_3^i [u_2^i]'' [v_2^i]'' + E^i I_2^i [u_3^i]'' [v_3^i]'' dx_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{nt-1} \sum_{j=1}^3 k_j^i \Lambda_j^i(\Phi, \vec{V}) \Lambda_j^i(\Theta, \vec{U}) \end{aligned}$$

et nous écrivons :

$$\begin{aligned} a_0(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) &= a_s((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) + \sum_{i=1}^{nt} -\rho^i S^i \int_0^{l_i} ((w_2^i)^2 + (w_3^i)^2) u_1^i v_1^i dx_i \\ &\quad + \rho^i \int_0^{l_i} (I_2^i - I_3^i) ((w_2^i)^2 - (w_3^i)^2) \theta_1^i \phi_1^i dx_i - \rho^i S^i \int_0^{l_i} ((w_3^i)^2 + (w_1^i)^2) u_2^i v_2^i dx_i \\ &\quad + \rho^i \int_0^{l_i} ((w_1^i)^2 - (w_2^i)^2) I_3^i [u_2^i]' [v_2^i]' dx_i - \rho^i S^i \int_0^{l_i} ((w_2^i)^2 + (w_1^i)^2) u_3^i v_3^i dx_i \\ &\quad + \rho^i \int_0^{l_i} ((w_1^i)^2 - (w_3^i)^2) I_2^i [u_3^i]' [v_3^i]' dx_i \end{aligned}$$

D'après l'étude du problème statique direct, nous savons qu'il existe une constante  $K_1 > 0$  (indépendante du temps) telle que :

$$a_s((\Theta, \vec{U}), (\Theta, \vec{U})) \geq K_1 \|(\Theta, \vec{U})\|_V^2.$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= 2 \max_{i=1, \dots, nt} \{ \rho^i S^i \max_{j=1, 2, 3} \{ \max_{t \in [0, T]} (w_j^i)^2(t) \} \}, \\ \mathcal{W}_2 &= 2 \max_{i=1, \dots, nt} \{ \rho^i \max_{j=1, 2} I_j^i \max_{j=1, 2, 3} \{ \max_{t \in [0, T]} (w_j^i)^2(t) \} \}, \end{aligned}$$

ces deux constantes étant finies sous l'hypothèse de régularité (1.45). On rejoint alors 2.1.iii) en posant :

$$\alpha = K_1, \quad \lambda = \max(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2).$$

De plus, d'après l'étude du problème statique direct, nous savons qu'il existe une constante  $K_2 > 0$  (indépendante du temps) telle que :

$$|a_s((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))| \leq K_2 \|(\Theta, \vec{U})\|_V \|(\Phi, \vec{V})\|_V.$$

Nous avons alors :

$$|a_0(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))| \leq (K_2 + \lambda) \|(\Theta, \vec{U})\|_V \|(\Phi, \vec{V})\|_V$$

ce qui permet de conclure à la **continuité** de  $a_0(t, \cdot, \cdot)$  sur  $V \times V$ .

Enfin, l'hypothèse (1.45) suffit pour atteindre 2.1.i).

Nous avons d'après (1.44) :

$$\begin{aligned}
a_1(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) &= \sum_{i=1}^{nt} \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{(-\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) u_2^i + (\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) u_3^i\} v_1^i dx_i \\
&+ \rho^i \int_0^{l_i} \{(\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) I_2^i [u_3^i]' + (\dot{w}_2^i - w_1^i w_3^i) I_3^i [u_2^i]'\} \phi_1^i dx_i \\
&+ \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{(\dot{w}_3^i + w_1^i w_2^i) u_1^i + (-\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) u_3^i\} v_2^i dx_i \\
&+ \rho^i \int_0^{l_i} \{-I_2^i [u_3^i]' (-\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) + (I_2^i - I_3^i) \theta_1^i (\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i)\} [v_2^i]' dx_i \\
&+ \rho^i S^i \int_0^{l_i} \{(-\dot{w}_2^i + w_1^i w_3^i) u_1^i + (\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) u_2^i\} v_3^i dx_i \\
&- \rho^i \int_0^{l_i} \{I_3^i [u_2^i]' (\dot{w}_1^i + w_2^i w_3^i) + (I_2^i - I_3^i) \theta_1^i (\dot{w}_3^i - w_1^i w_2^i)\} [v_3^i]' dx_i
\end{aligned}$$

L'hypothèse 2.2.i) est vérifiée sous l'hypothèse de régularité (1.45). On vérifie également que l'hypothèse 2.2.ii) est atteinte avec la constante :

$$c_1 = \max(\lambda, \lambda').$$

où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 &= 2 \max_{i=1, \dots, nt} \{ \rho^i S^i \max_{j=1,2,3} \{ \max_{t \in [0,T]} (w_j^i)^2(t) \} \}, \\
\mathcal{W}_2 &= 2 \max_{i=1, \dots, nt} \{ \rho^i \max_{j=1,2} I_j^i \max_{j=1,2,3} \{ \max_{t \in [0,T]} (w_j^i)^2(t) \} \}, \\
\lambda' &= \max(\mathcal{W}_1^p, \mathcal{W}_2^p),
\end{aligned}$$

la constante  $\lambda'$  étant finie sous l'hypothèse de régularité (1.45).

Ce qui précède, joint à la continuité de  $a_0(t, \cdot)$  sur  $V \times V$  permet en outre de rejoindre l'hypothèse 1).

La continuité de  $t \rightarrow b(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))$  est acquise sous l'hypothèse (1.45), et on montre que :

$$\begin{aligned}
(1.46) \quad &\forall ((\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V})) \in V \times V : \\
&|b(t, (\Theta, \vec{U}), (\Phi, \vec{V}))| \leq \lambda \|(\Theta, \vec{U})\|_H \|(\Phi, \vec{V})\|_H
\end{aligned}$$

On rejoint ainsi les hypothèses 3.i) et 3.ii).

La seule hypothèse à vérifier sur  $C$  est 4.iii). D'après (1.42), l'expression de  $\gamma$  est :

$$\gamma = \min_{i=1,\dots,nt} (\rho^i S^i, \rho^i J^i)$$

Enfin, l'hypothèse 5) est vérifiée si en plus de l'hypothèse (1.45) on fait l'hypothèse de régularité suivante :

$$(1.47) \quad \begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt \quad & \underline{f}^i \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^3), \\ & \mathcal{F} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^3), \\ & \mathcal{M} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^3), \\ & \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad \ddot{T}_j^i R_{[k,j]}^i \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Nous avons donc le théorème :

**Théorème 1.4.2** *Le problème variationnel (1.37), défini à l'aide des opérateurs (1.42), (1.43), (1.44) et (1.41) admet une solution unique si les hypothèses de régularité (1.45) et (1.47) sont vérifiées.*



# Chapitre 2

## Approche globale

---

### 2.1 Introduction et notations

Nous considérons l'évolution au cours du temps, d'une chaîne ouverte simple, constituée de  $nt$  poutres flexibles. Nous nous fixons une durée d'observation  $[0; T]$  et nous notons  $t$  le temps ( $t \in [0, T]$ ). Nous reprenons par ailleurs pour l'essentiel les notations du chapitre 2, partie A. Nous adoptons en particulier la représentation :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} {}^i\mathbf{x}({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is, t) &= {}^i\mathbf{r}(s, t) + {}^iX_1 {}^i\mathbf{d}_1({}^is, t) + {}^iX_2 {}^i\mathbf{d}_2({}^is, t) \\ \forall ({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is) &\in \Omega_i \end{aligned}$$

où  ${}^i\mathbf{x}$  est le vecteur-position d'une particule de la barre  $i$  repérée par les coordonnées  $({}^is, {}^iX_1, {}^iX_2)$  en configuration de référence.

Nous introduisons de plus les quantités mécaniques et géométriques suivantes :

- ${}^i\mu({}^is)$  : masse volumique de la barre  $i$  ;
- ${}^i\mathbf{f}({}^is, t)$  : densité linéique d'efforts extérieurs exercés sur la barre  $i$  ;
- $\mathcal{F}(t)$  : force appliquée à l'extrémité du dernier maillon de la chaîne ;
- ${}^i\mathcal{T}(t) = \overline{O_{i-1}O_i}(t)$ , où  $O_i$  est le point de contact entre la poutre  $i$  et la poutre  $i - 1$ .

### 2.2 Modèle mécanique

Comme au chapitre 2, partie A, on introduit les mesures de déformations :

$$(2.2) \quad {}^iu_j = \frac{1}{2} e_{[j,k,l]} {}^i\mathbf{d}'_k \cdot {}^i\mathbf{d}_l$$

et :

$$(2.3) \quad {}^iv_k = \mathbf{r}' \cdot {}^i\mathbf{d}_k.$$

On se restreint au cas de barres à section *circulaire* et on conserve la densité *objective* (voir **Simo & Vu-Quoc** [1986.1], **Simo** [1985]) d'énergie de déformation :

$$(2.4) \quad {}^i w^e = \frac{{}^i \mathbf{G}^i \mathbf{S}}{2} ({}^i v_1^2 + {}^i v_2^2) + \frac{{}^i \mathbf{E}^i \mathbf{S}}{2} ({}^i v_3 - 1)^2 + \frac{{}^i \mathbf{E}^i \mathbf{I}}{2} ({}^i u_1^2 + {}^i u_2^2) + {}^i \mathbf{G}^i \mathbf{I}^i u_3^2$$

Nous adoptons, pour chaque poutre de la chaîne, le modèle mécanique de **Simo** [1985].

### • Loi de comportement

$$(2.5) \quad \begin{cases} {}^i \mathbf{m}(^i s, t) = \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l}(^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathbf{d}_l(^i s, t) \\ {}^i \mathbf{n}(^i s, t) = \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l}(^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathbf{d}_l(^i s, t) \end{cases}$$

### • Équations du mouvement

$$(2.6) \quad \begin{cases} {}^i \mathbf{m}' + {}^i \mathbf{r}' \wedge {}^i \mathbf{n} + {}^i \mathbf{d}_\alpha \wedge {}^i \mathbf{f}_\alpha = 0 \\ {}^i \mathbf{n}' + {}^i \mathbf{f}_3 = 0 \end{cases}$$

où on a noté :

$$\begin{cases} {}^i \mathbf{f}_\alpha = -{}^i \mu(^i s) {}^i \mathbf{I}^i \ddot{\mathbf{d}}_\alpha(^i s, t) & \alpha = 1, 2 \\ {}^i \mathbf{f}_3 = {}^i \mathbf{f}(^i s) - {}^i \mu(^i s) {}^i \mathbf{S}^i \ddot{\mathbf{r}}(^i s, t) \end{cases}$$

## 2.3 Contraintes, conditions aux limites et de jonction, conditions initiales

### 2.3.1 Contraintes et conditions aux limites

La première poutre de la chaîne est supposée solidaire d'un support rigide fixe. Dans le cas d'un encastrement, nous avons les conditions :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0; T] \quad {}^1 \mathbf{r}(0, t) &= 0, \\ {}^1 \mathbf{d}_j(0, t) &= \mathbf{d}_j^0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

où  $(\mathbf{d}_1^0, \mathbf{d}_2^0, \mathbf{d}_3^0)$  est une base orthonormée fixe.

Dans le cas où il existe une liaison pivot, entre la première poutre de la chaîne et un support rigide fixe, nous supposons que l'un des vecteurs  $\{{}^1 \mathbf{d}_j(0, t)\}_{j=1, \dots, 3}$  se

confond avec un des vecteurs directeurs normés, noté  $\mathbf{u}_0$ , de l'axe de cette liaison. Nous écrivons donc :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0; T] \quad {}^1\mathbf{r}(0, t) &= 0, \\ {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0, t) &= \mathbf{u}_0, \\ {}^1\mathbf{m}(0, t) \cdot {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0, t) &= 0, \quad \text{pour un } j_0 \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Nous avons également des conditions de compatibilité des champs d'efforts et de moments internes avec le chargement extérieur :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \forall t \in [0; T] \quad {}^{nt}\mathbf{n}(l_{nt}, t) = \mathcal{F}(t), \\ {}^{nt}\mathbf{m}(l_{nt}, t) = 0. \end{cases}$$

Nous avons enfin la contrainte :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt \quad {}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k &= \delta_j^k \\ ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 &> 0 \end{aligned}$$

### 2.3.2 Modèle de jonction

Les articulations de la chaîne transmettent intégralement les déplacements, ainsi que les efforts et moments intérieurs. Nous avons donc les conditions de raccord :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0; T] \quad \forall i = 1, \dots, nt-1 \quad {}^i\mathbf{r}(l_i, t) &= {}^{i+1}\mathcal{T}(t) + {}^{i+1}\mathbf{r}(0, t), \\ {}^i\mathbf{n}(l_i, t) &= {}^{i+1}\mathbf{n}(0, t), \\ {}^i\mathbf{m}(l_i, t) &= {}^{i+1}\mathbf{m}(0, t). \end{aligned}$$

Soit  $i$  un indice appartenant à  $\{2, \dots, nt\}$ . Nous faisons l'hypothèse que l'égalité :

$$(2.12) \quad {}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}(0, t) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}, t).$$

a lieu pour un couple  $({}^0j_i, {}^{i-1}j_{i-1})$  donné dans  $\{1, 2, 3\}^2$  et un réel  $\epsilon_i$  donné dans  $\{-1, +1\}$  et pour tout instant  $t$  dans  $[0; T]$ .

Soient  $({}^0k_i, {}^0l_i) \in \{1, 2, 3\}^2$  tels que, à tout instant  $t$  dans  $[0; T]$ , la famille

$$\{{}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}(0, t), {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0, t), {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0, t)\}$$

constitue une base orthonormée *directe* et soient  $({}^{i-1}k_{i-1}, {}^{i-1}l_i) \in \{1, 2, 3\}^2$  tels que, à tout instant  $t$  dans  $[0; T]$ , la famille

$$\{{}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}, t), {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}, t), {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_i}(l_{i-1}, t)\}$$



constitue une base orthonormée *directe*. Nous reprenons l'hypothèse du chapitre 2, partie A, selon laquelle le moment articulaire est de la forme :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} {}^i\mathbf{m}(0, t) &= {}^{i-1}\mathbf{m}(l_{i-1}, t), \\ &= -\kappa_{i-1} \mathcal{A}_i(t) \wedge \mathcal{B}_i(t), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= (\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0, t) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0, t)), \\ \mathcal{B}_i &= (\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}, t) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}, t)). \end{aligned}$$

pour tout instant  $t$  dans  $[0; T]$ , les deux réels  ${}^0\theta_i$  et  ${}^{i-1}\theta_{i-1}$  étant choisis de façon à annuler le moment articulaire en configuration de référence.

### 2.3.3 Conditions initiales

Nous reprenons les principes de construction de la configuration de référence que nous avons énoncés pour le cas statique. Nous supposons également que la configuration *initiale* s'identifie à la configuration de référence. Nous écrivons donc :

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{r}(^is, 0) &= {}^is\mathbf{e}_3^i \\ {}^i\mathbf{d}_j(^is, 0) &= \mathbf{e}_j^i \end{aligned}$$

où  $\{\mathbf{e}^i\}$  est la base principale d'inertie de la barre  $i$  en configuration de référence.

Nous nous donnons en outre des champs de vitesses initiales :

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\mathbf{r}}(^is, 0) &= {}^i\mathbf{v}_r(^is) \\ {}^i\dot{\mathbf{d}}_j(^is, 0) &= {}^i\mathbf{v}_j(^is) \end{aligned}$$

## 2.4 Formulation variationnelle

### 2.4.1 Cadre fonctionnel

Soient les espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3) \\ \mathcal{H} &= \prod_{i=1}^{nt} \mathcal{H}_i \\ \mathcal{H}_{3,i} &= H^2(0, T; H^1(0, l_i; \mathbb{R}^{3 \times 3})) \end{aligned}$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , on s'intéresse à l'espace des **configurations** cinématiquement admissibles à l'instant  $t$ . Compte tenu de ce qui précède, cet espace s'identifie à :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t = & \{ \{ \{ {}^i\mathbf{r}, \{ {}^i\mathbf{d}_j \}_{j=1,2,3} \}_{i=1,\dots,nt} = ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{r}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1}\mathcal{T} + {}^{i+1}\mathbf{r}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1\mathbf{d}_j(0) = \mathbf{d}_j^0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i\mathbf{d}_{o_{j_i}}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}) ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad {}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k = \delta_l^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 > 0 \} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu lors de l'étude du problème statique direct, cet espace possède une structure de variété  $\mathcal{C}^\infty$  de l'espace  $\mathcal{H}$ . Son espace tangent  $\delta \mathcal{K}_t(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$  au point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  est défini par :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K}_t(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = & \{ \{ \{ {}^i\mathbf{p}, \{ {}^i\mathbf{g}_j \}_{j=1,2,3} \}_{i=1,\dots,nt} = ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1}\mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1\mathbf{g}_j(0) = 0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (2.7) est imposé ;} \\ & {}^1\mathbf{g}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (2.8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i\mathbf{g}_{o_{j_i}}(0) = \epsilon_i {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad \exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{H}_i \text{ tel que : } {}^i\mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_j \forall j \in \{1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$

## 2.4.2 Formulation variationnelle

Nous allons maintenant montrer le théorème :

**Théorème 2.4.1** *Les équations du mouvement (2.6) sont équivalentes au problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  suivant :*

Pour tout  $t \in [0, T]$ , trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}_t$  tel que :  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta \mathcal{K}_t(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) :$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) & + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{o_{l_i}}(0) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & + \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{o_{l_i}}(0) \} \end{aligned} \right\} \\ & = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} [{}^i\mathbf{f}_3(t) \cdot {}^i\mathbf{p} + {}^i\mathbf{f}_\alpha(t) \cdot {}^i\mathbf{g}_\alpha] d^i s + \mathcal{F}(t) \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

où on a posé :

$$\mathcal{J}((^i\mathbf{r}, ^i\mathbf{d}_j)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) d^i s$$

Démonstration :

D'après l'expression (2.4) de la densité d'énergie  ${}^i w^e$ , nous pouvons affirmer que les deux hypothèses de régularité suivantes sont vérifiées :

- Pour tout  $i \in \{1, \dots, nt\}$ , pour tout  $t \in [0; T]$  :

$$(2.14) \quad {}^i w^e({}^i s, t, \dots) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^6) \text{ p.p. sur } ]0; l_i[$$

- Pour tout  $j \in \{1, \dots, nt\}$  et pour tout  $({}^j u_k, {}^j v_k, {}^j \mathcal{U}_k, {}^j \mathcal{V}_k) \in L^2(0, l_j; \mathbb{R}^{12})$  et pour tout  $t \in [0; T]$  :

$$(2.15) \quad \left| \frac{\partial {}^j w^e}{\partial {}^j u_i}({}^j s, t, {}^j u_k, {}^j v_l) {}^j \mathcal{U}_i + \frac{\partial {}^j w^e}{\partial {}^j v_i}({}^j s, t, {}^j u_k, {}^j v_l) {}^j \mathcal{V}_i \right| \leq [{}^j \mathcal{C}_0 + {}^j \mathcal{C}_1 ({}^j u_k^2 + {}^j v_l^2)^{\frac{1}{2}}] [{}^j \mathcal{U}_k^2 + {}^j \mathcal{V}_l^2]^{\frac{1}{2}}$$

où  ${}^j \mathcal{C}_0$  et  ${}^j \mathcal{C}_1$  sont des constantes réelles strictement positives.

Les gradients

$${}^i \mathcal{U}_j = \frac{\partial {}^i u_j}{\partial (^i \mathbf{r}, ^i \mathbf{d}_j)} \cdot (^i \mathbf{p}, ^i \mathbf{g}_j)$$

$${}^i \mathcal{V}_j = \frac{\partial {}^i v_j}{\partial (^i \mathbf{r}, ^i \mathbf{d}_j)} \cdot (^i \mathbf{p}, ^i \mathbf{g}_j)$$

valent

$$(2.16) \quad \begin{cases} {}^i \mathcal{U}_j = \frac{1}{2} e_{[j,k,l]} ({}^i \mathbf{g}'_k \cdot {}^i \mathbf{d}_l + {}^i \mathbf{d}'_k \cdot {}^i \mathbf{g}_l) \\ {}^i \mathcal{V}_j = {}^i \mathbf{p}' \cdot {}^i \mathbf{d}_k + {}^i \mathbf{r}' \cdot {}^i \mathbf{g}_k \end{cases}$$

et par définition de  $\delta \mathcal{K}_t$ , nous avons

$$(2.17) \quad \mathcal{U}'_i = {}^i \mathcal{U}_j {}^i \mathbf{d}_j$$

ainsi que

$$(2.18) \quad {}^i \mathbf{p}' = {}^i \mathcal{V}_k {}^i \mathbf{d}_k + \mathcal{U}_i \wedge {}^i \mathbf{r}'.$$

On applique ensuite les techniques du chapitre 2, partie A, aux opérateurs  $\left\{ {}^i w^e(., t, ., .) \right\}_{i=1, \dots, nt}$  pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{J}({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)}{\partial ({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i \mathbf{p}, {}^i \mathbf{g}_j) = \\ & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \left\{ \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l} ({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{U}_l + \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l} ({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{V}_l \right\} d {}^i s dt \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  peut se réécrire

Pour tout  $t \in [0, T]$ , trouver  $({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}_t$  tel que :  $\forall ({}^i \mathbf{p}, {}^i \mathbf{g}_j) \in \delta \mathcal{K}_t(({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)) :$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \left\{ \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l} ({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{U}_l + \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l} ({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) {}^i \mathcal{V}_l \right\} d {}^i s \\ & + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{d}_{o_{l_i}}(0) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1} k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1} l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & + \{ \cos({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1} k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1} l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{g}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{g}_{o_{l_i}}(0) \} \end{aligned} \right\} \\ & = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} [{}^i \mathbf{f}_3(t) \cdot {}^i \mathbf{p} + {}^i \mathbf{f}_\alpha(t) \cdot {}^i \mathbf{g}_\alpha] d {}^i s + \mathcal{F}(t) \cdot {}^{nt} \mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

D'après les relations (2.17), (2.18) et les équations (2.6), on peut aussi écrire ce problème sous la forme :

Pour tout  $t \in [0, T]$ , trouver  $({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}_t$  tel que :  $\forall ({}^i \mathbf{p}, {}^i \mathbf{g}_j) \in \delta \mathcal{K}_t(({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)) :$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \{ {}^i \mathbf{m} \cdot \mathcal{U}'_i + {}^i \mathbf{n} \cdot ({}^i \mathbf{p}' - \mathcal{U}_i \wedge {}^i \mathbf{r}') \} d {}^i s \\ & + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{d}_{o_{l_i}}(0) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1} k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1} l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & + \{ \cos({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1} k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1} \theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1} l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{g}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0 \theta_i) {}^i \mathbf{g}_{o_{l_i}}(0) \} \end{aligned} \right\} \\ & = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} [{}^i \mathbf{f}_3(t) \cdot {}^i \mathbf{p} + {}^i \mathbf{f}_\alpha(t) \cdot {}^i \mathbf{g}_\alpha] d {}^i s + \mathcal{F}(t) \cdot {}^{nt} \mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

On opère ensuite une intégration par parties :

Pour tout  $t \in [0, T]$ , trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}_t$  tel que :  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}_t(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$  :

$$\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} \{-{}^i\mathbf{m} - {}^i\mathbf{r}' \wedge {}^i\mathbf{n} - {}^i\mathbf{d}_\alpha \wedge {}^i\mathbf{f}_\alpha\} \cdot \mathcal{U}_i - \{{}^i\mathbf{n} + {}^i\mathbf{f}_3\} \cdot {}^i\mathbf{p} \, d^i s = 0$$

et on reconnaît la formulation variationnelle des équations du mouvement (2.6).

### 2.4.3 Discrétisation en temps

Nous remarquons d'abord que la variété  $\mathcal{K}_t$  est indépendante du temps  $t$ , ainsi que les espaces tangents  $\delta\mathcal{K}_t$ . Nous la noterons dorénavant  $\mathcal{K}$  et ses espaces tangents seront notés  $\delta\mathcal{K}$ .

Nous procédons maintenant à une discrétisation en temps du problème variationnel  $[\mathcal{P}]$ . On se donne un pas de temps  $\Delta t$  et on écrit ainsi une suite de problèmes variationnels statiques où les dérivées temporelles de  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  [supposé suffisamment régulier en temps], sont remplacées par des expressions approchées.

On se donne un entier  $N$  et un pas de temps

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

On note

$$(\mathbf{r}^n, \mathbf{d}_j^n) = ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)(n \Delta t),$$

où  $n$  appartient à  $\{0, \dots, N\}$ . Pour tout  $n$  dans  $\{0, \dots, N\}$ ,  $(\mathbf{r}^n, \mathbf{d}_j^n)$  appartient à  $\mathcal{K}$ .

On introduit l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(t, ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) \, d^i s - \mathcal{F}(t) \cdot {}^{nt}\mathbf{r}(l_{nt}) - \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i \mathbf{f}({}^i s, t) \cdot {}^i \mathbf{r}({}^i s) \\ &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{o_{l_i}}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1} k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1} l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1} k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1} l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{o_{k_i}}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{o_{l_i}}(0)\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

et on note

$$\mathcal{L}_0^n = \mathcal{L}_0(n \Delta t, \mathbf{r}^n, \mathbf{d}_j^n).$$

Supposons maintenant  $n \geq 3$ . Nous employons la méthode de Houboldt, méthode à trois pas, inconditionnellement stable (George [1985]) et nous remplaçons donc les termes du type  ${}^i\ddot{\mathbf{r}}^n$  par l'approximation :

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}^n \approx \frac{1}{\Delta t^2} \{2 {}^i\mathbf{r}^n - 5 {}^i\mathbf{r}^{n-1} + 4 {}^i\mathbf{r}^{n-2} - {}^i\mathbf{r}^{n-3}\}$$

On suppose  ${}^i\ddot{\mathbf{r}}$  de classe  $C^6$  en temps et on écrit donc l'estimation :

$$\begin{aligned} {}^i\ddot{\mathbf{r}}^n &= \frac{1}{\Delta t^2} \{2 {}^i\mathbf{r}^n - 5 {}^i\mathbf{r}^{n-1} + 4 {}^i\mathbf{r}^{n-2} - {}^i\mathbf{r}^{n-3}\} \\ &= \frac{5\Delta t^2}{6} \left( \frac{\partial^4}{\partial t^4} {}^i\mathbf{r} \right)^{n-1} + \frac{\Delta t^4}{12} \left( \frac{\partial^6}{\partial t^6} {}^i\mathbf{r} \right)^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{6} \left( \frac{\partial^4}{\partial t^4} {}^i\mathbf{r} \right)^{n-2} + \Delta t^2 \epsilon(\Delta t) \end{aligned}$$

où  $\epsilon(\Delta t)$  tend vers zéro lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro. Nous remplaçons donc le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  continu en temps par la suite de problèmes  $[\mathcal{P}_n]$  :

Trouver un point critique, dans  $\mathcal{K}$ , de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n &= \mathcal{L}_0^n + \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{S} \int_0^{l_i} \| {}^i\mathbf{r}^n \|^2 + [-5 {}^i\mathbf{r}^{n-1} + 4 {}^i\mathbf{r}^{n-2} - {}^i\mathbf{r}^{n-3}] \cdot {}^i\mathbf{r}^n \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{I} \int_0^{l_i} \| {}^i\mathbf{d}_\alpha^n \|^2 + [-5 {}^i\mathbf{d}_\alpha^{n-1} + 4 {}^i\mathbf{d}_\alpha^{n-2} - {}^i\mathbf{d}_\alpha^{n-3}] \cdot {}^i\mathbf{d}_\alpha^n \end{aligned}$$

ceci pour  $n$  supérieur ou égal à 3.

Nous devons élaborer une procédure d'initialisation particulière pour les deux premiers itérés ( $n=1$  et  $2$ ). Nous suivons pour cela de la méthode développée dans Glowinski & Le Tallec [1989]. Son principe est le suivant : on remplace les termes de dérivées secondes en temps par une approximation de Crank-Nicholson (méthode à un pas, d'ordre 2, précision maximale) :

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}^n \approx \frac{1}{\Delta t^2} \{ {}^i\mathbf{r}^{n-1} + {}^i\mathbf{r}^{n+1} - 2 {}^i\mathbf{r}^n \} \quad n = 1, 2$$

et on recherche, non plus  ${}^i\mathbf{r}^n$  mais une approximation aux différences centrées de  ${}^i\mathbf{r}^n$ , soit

$${}^i\hat{\mathbf{r}}^n = \frac{{}^i\mathbf{r}^{n+1} + {}^i\mathbf{r}^{n-1} + 2 {}^i\mathbf{r}^n}{4}.$$

On utilise ensuite un développement limité en temps à l'instant  $t = 0$  pour obtenir :

$${}^i\mathbf{r}^2 + {}^i\mathbf{r}^0 - 2 {}^i\mathbf{r}^1 = 4 \{ {}^i\hat{\mathbf{r}}^1 - {}^i\mathbf{r}^0 - 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0 \}$$

ainsi que

$${}^i\mathbf{r}^3 + {}^i\mathbf{r}^1 - 2 {}^i\mathbf{r}^2 = 4 \{ {}^i\hat{\mathbf{r}}^2 - 4 {}^i\hat{\mathbf{r}}^1 + 3 {}^i\mathbf{r}^0 + 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0 \}.$$

L'étape d'initialisation consiste donc en la résolution du problème  $[\mathcal{P}_1]$ :

<p style="text-align: center;">Trouver un point critique, dans <math>\mathcal{K}</math>, de la fonctionnelle</p> $\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= \mathcal{L}_0^1 + \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{S} \int_0^{l_i} 2 \  {}^i\mathbf{r}^1 \ ^2 - 4 [ {}^i\mathbf{r}^0 + \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0 ] \cdot {}^i\mathbf{r}^1 \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{I} \int_0^{l_i} 2 \  {}^i\mathbf{d}_\alpha^1 \ ^2 - 4 [ {}^i\mathbf{d}_\alpha^0 + \Delta t {}^i\dot{\mathbf{d}}_\alpha^0 ] \cdot {}^i\mathbf{d}_\alpha^1. \end{aligned}$
--

puis du problème  $[\mathcal{P}_2]$ :

<p style="text-align: center;">Trouver un point critique, dans <math>\mathcal{K}</math>, de la fonctionnelle</p> $\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= \mathcal{L}_0^2 + \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{S} \int_0^{l_i} 2 \  {}^i\mathbf{r}^2 \ ^2 + 4 [ -4 {}^i\mathbf{r}^1 + 3 {}^i\mathbf{r}^0 + 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0 ] \cdot {}^i\mathbf{r}^2 \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{I} \int_0^{l_i} 2 \  {}^i\mathbf{d}_\alpha^2 \ ^2 + 4 [ -4 {}^i\mathbf{d}_\alpha^1 + 3 {}^i\mathbf{d}_\alpha^0 + 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{d}}_\alpha^0 ] \cdot {}^i\mathbf{d}_\alpha^2. \end{aligned}$
---

## 2.5 Résolution numérique pour le cas inextensible

Nous avons réduit le problème dynamique de départ à une suite de problèmes statiques. Les procédures de résolution de ces problèmes statiques ont été détaillées au chapitre 2, partie A et nous ne les reprenons pas ici. Nous nous contentons de présenter quelques cas tests significatifs.

### 2.5.1 Cas sans raccord : Poutre en rotation

Nous considérons le cas d'une seule poutre, de longueur  $L$ , reliée à un support fixe par une rotule. Le chargement de la structure consiste, en plus du poids propre, en un effort ponctuel appliqué à l'extrémité libre de la poutre. Nous imposons l'angle de rotation de la poutre à la rotule :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(0, t) &= \underline{e}_2^a \\ \mathbf{d}_2(0, t) &= -\sin(\Phi(t)) \underline{e}_1^a + \cos(\Phi(t)) \underline{e}_3^a \\ \mathbf{d}_3(0, t) &= \cos(\Phi(t)) \underline{e}_1^a + \sin(\Phi(t)) \underline{e}_3^a \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\pi t}{5} \text{ si } t \leq 2.5s \\ &= \frac{\pi}{2} \text{ si } t > 2.5s \end{aligned}$$

Le maillage de la poutre comprend 25 éléments. Nous avons effectué nos tests avec

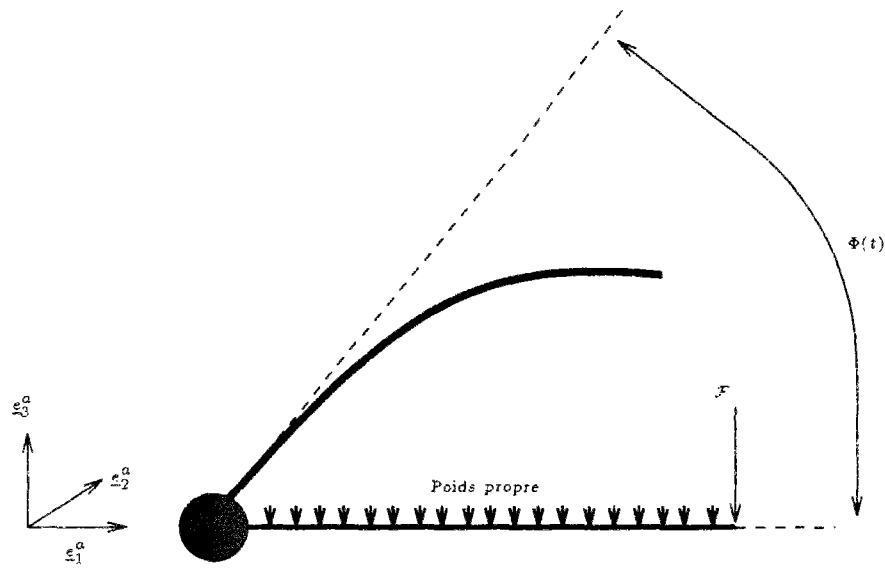


FIG. 2.1 - Poutre en flexion - Rotation imposée

les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\mu S &= 1 \text{ kg/m}, \\ L &= 10 \text{ m}, \\ T &= 10 \text{ s}, \Delta t = 0.5 \text{ s}, \\ \alpha &= 0.1, \beta = 0.\end{aligned}$$

Nous avons testé notre algorithme pour quelques valeurs de la rigidité à la flexion  $\mathbf{EI}$ , ainsi que pour quelques valeurs de l'effort ponctuel  $\mathcal{F}$ .



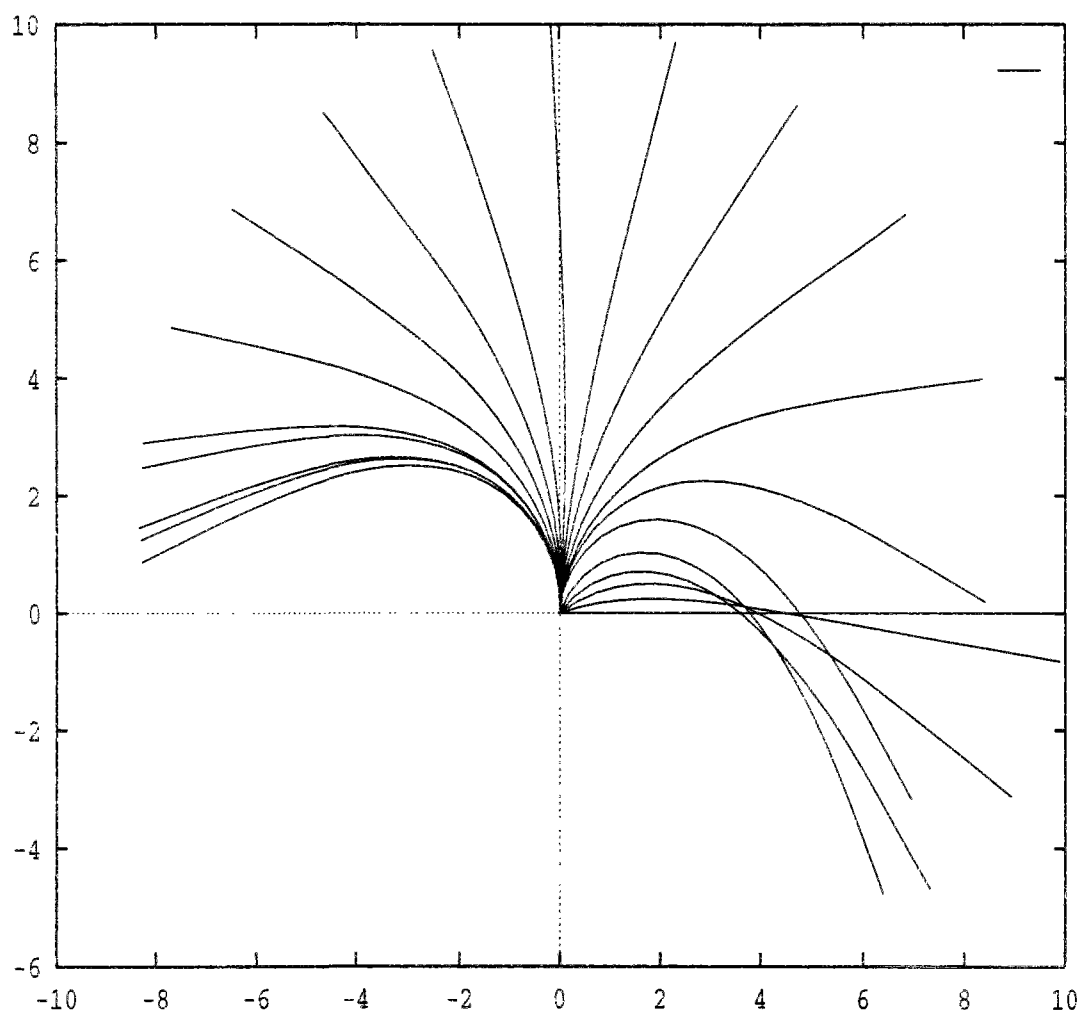
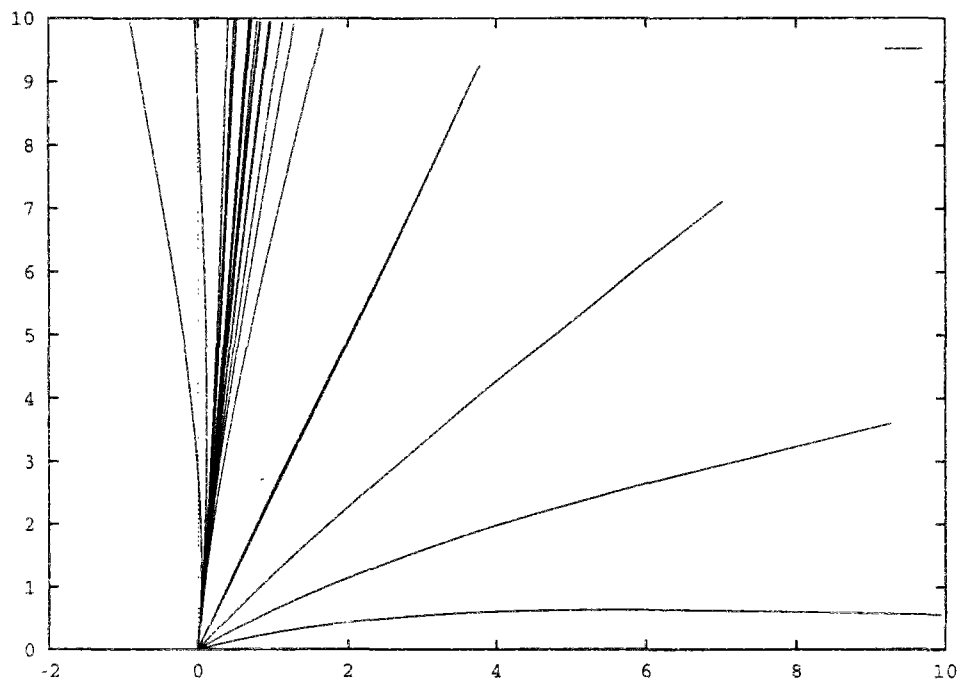
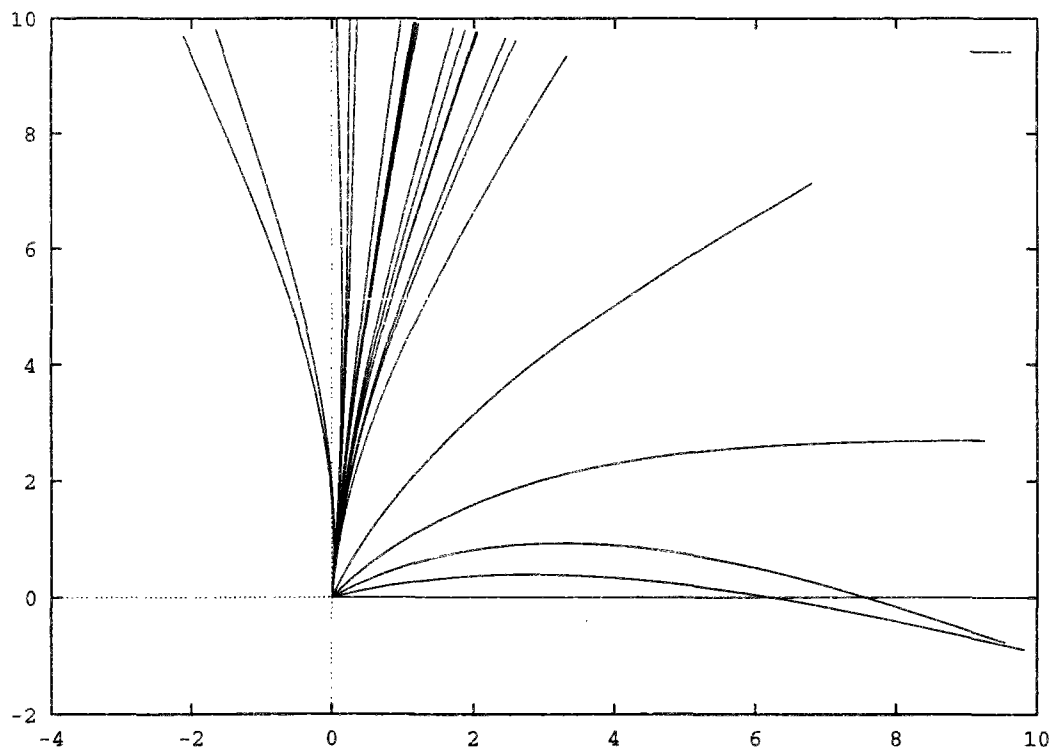


FIG. 2.2 -  $\mathbf{EI} = 1000 \, N \times m^2, \mathcal{F} = +1 \, N$

FIG. 2.3 -  $EI = 10^4 N \times m^2, \mathcal{F} = +1 N$ FIG. 2.4 -  $EI = 10^4 N \times m^2, \mathcal{F} = +100 N$

### 2.5.2 Poutres en flexion

- Cas d'une articulation élastique.

Nous considérons maintenant une structure formée de deux poutres, de longueurs égales  $L$ , chargée dans son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$ , par son poids propre, dirigé par  $\underline{e}_3^a$ .

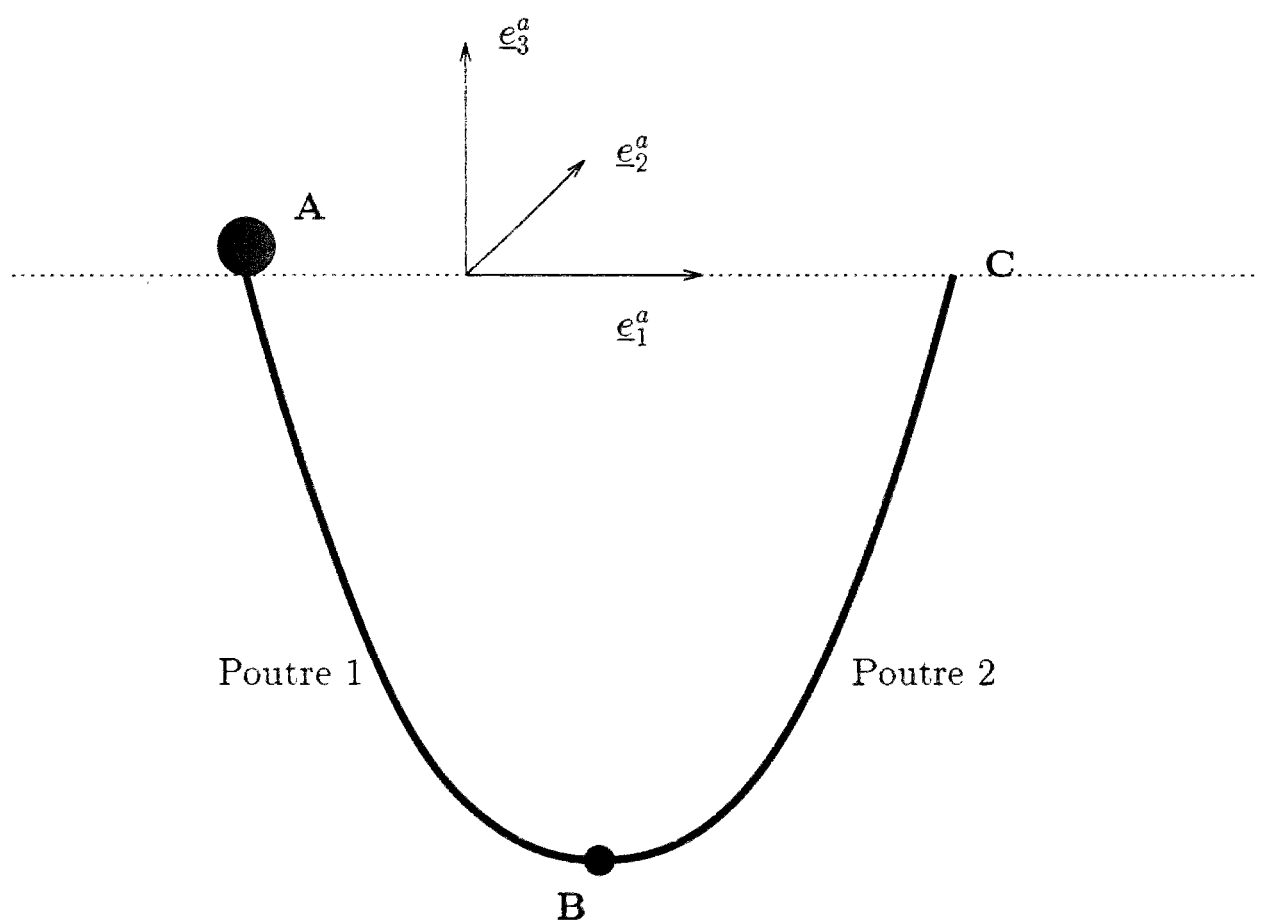


FIG. 2.5 - Configuration initiale

Cette structure est articulée en **B**. L'articulation, d'axe  $\underline{e}_2^a$  a pour raideur  $\kappa_1 = 10N \times m$ . Nous imposons en outre l'angle de rotation de la poutre 1 en A :

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{d}_1(0,t) &= \underline{e}_2^a \\ {}^1\mathbf{d}_2(0,t) &= -\sin(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \cos(\Phi(t))\underline{e}_3^a \\ {}^1\mathbf{d}_3(0,t) &= \cos(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \sin(\Phi(t))\underline{e}_3^a \end{aligned}$$

avec :

$$\Phi(t) = \pi t$$

Enfin l'extrémité C de la poutre 2 est laissée libre.

Notre maillage est formé de 25 éléments par poutre. Le pas de temps choisi vaut  $\Delta t = 0.05s$ . Nous avons effectué nos tests avec les paramètres suivants, identiques pour les deux poutres :

$$\begin{aligned} EI &= 700 \, N \times m^2 \\ L &= 16.3 \, m, \mu S = 7.67 \, kg/m \end{aligned}$$

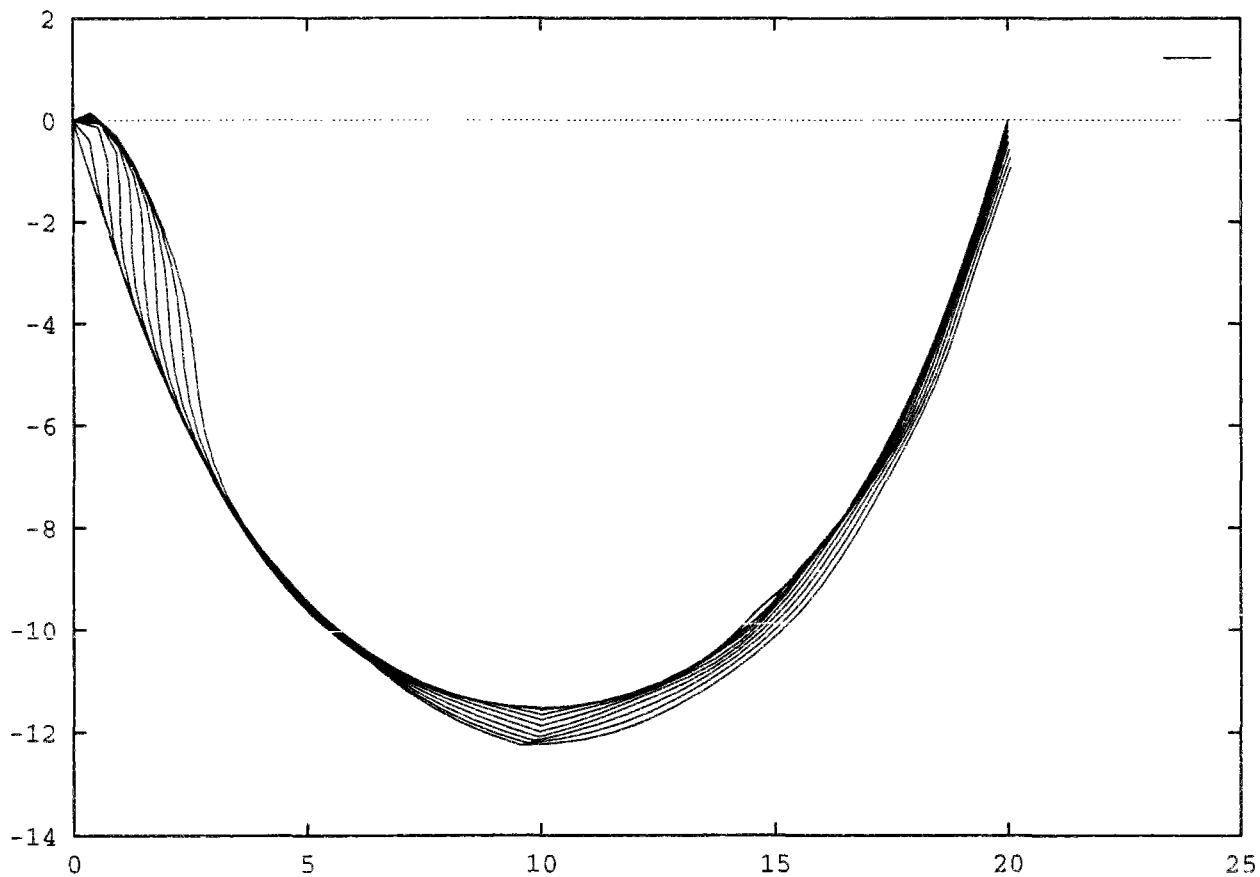


FIG. 2.6 - Charnière élastique - Temps  $[0; 0.5s]$

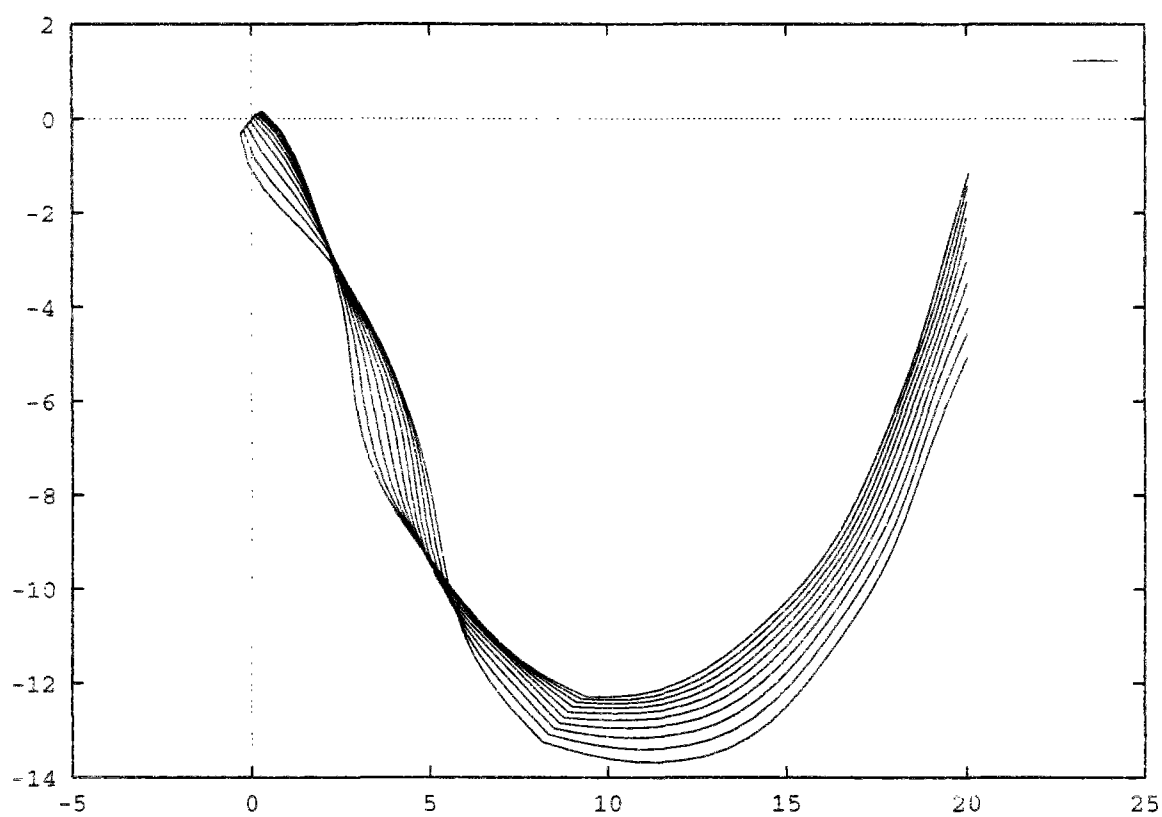


FIG. 2.7 - Charnière élastique - Temps  $[0.5s; 1s]$

• Cas d'une articulation libre.

Nous considérons une structure formée de deux poutres, de longueurs égales  $L$ , chargée dans son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$ , par son poids propre, dirigé par  $\underline{e}_3^a$ . Cette

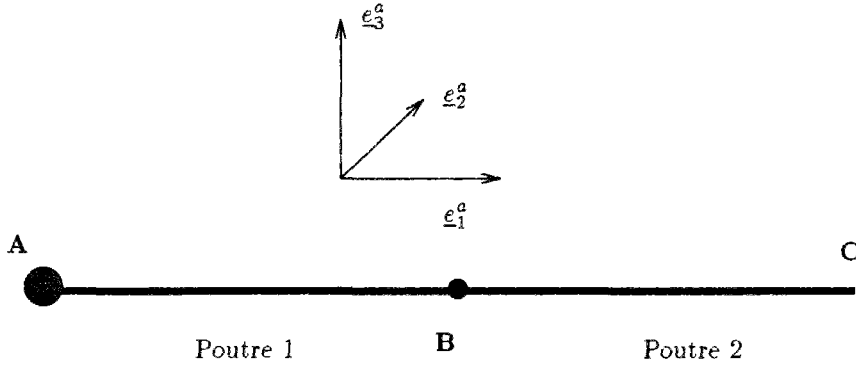


FIG. 2.8 - Configuration initiale

structure est articulée en **B**. Nous considérons le cas limite où l'articulation, d'axe  $\underline{e}_2^a$ , a pour raideur  $\kappa_1 = 0$ . Nous imposons en outre l'angle de rotation de la poutre 1 en A :

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{d}_1(0, t) &= \underline{e}_2^a \\ {}^1\mathbf{d}_2(0, t) &= -\sin(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \cos(\Phi(t))\underline{e}_3^a \\ {}^1\mathbf{d}_3(0, t) &= \cos(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \sin(\Phi(t))\underline{e}_3^a \end{aligned}$$

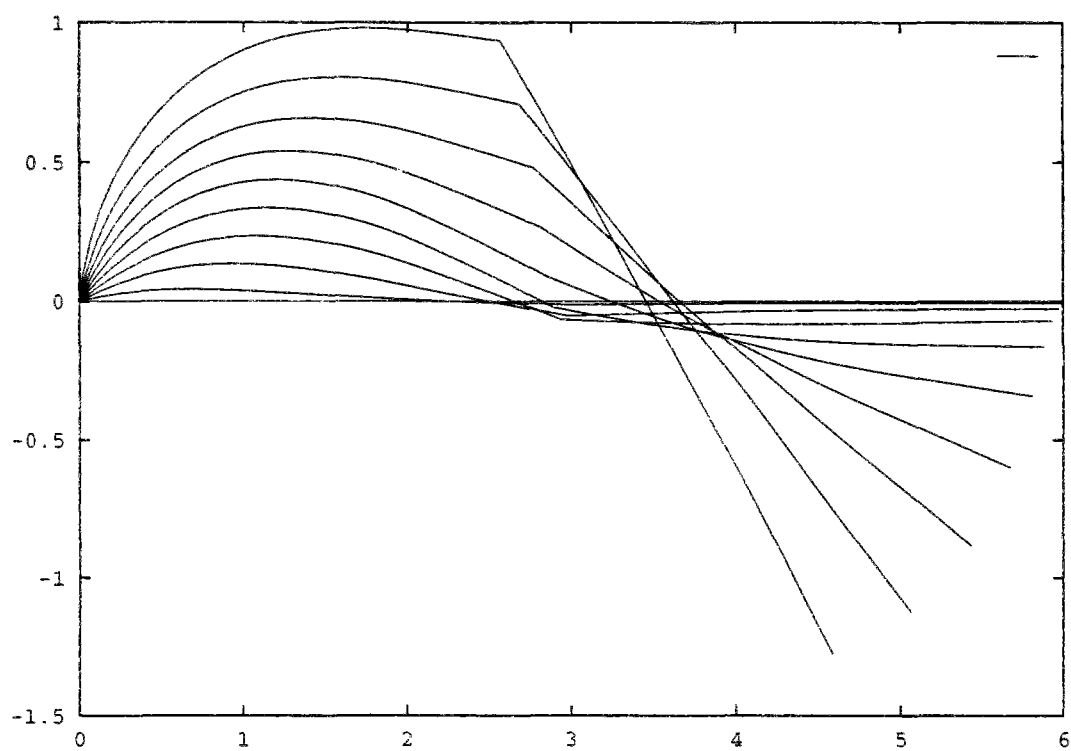
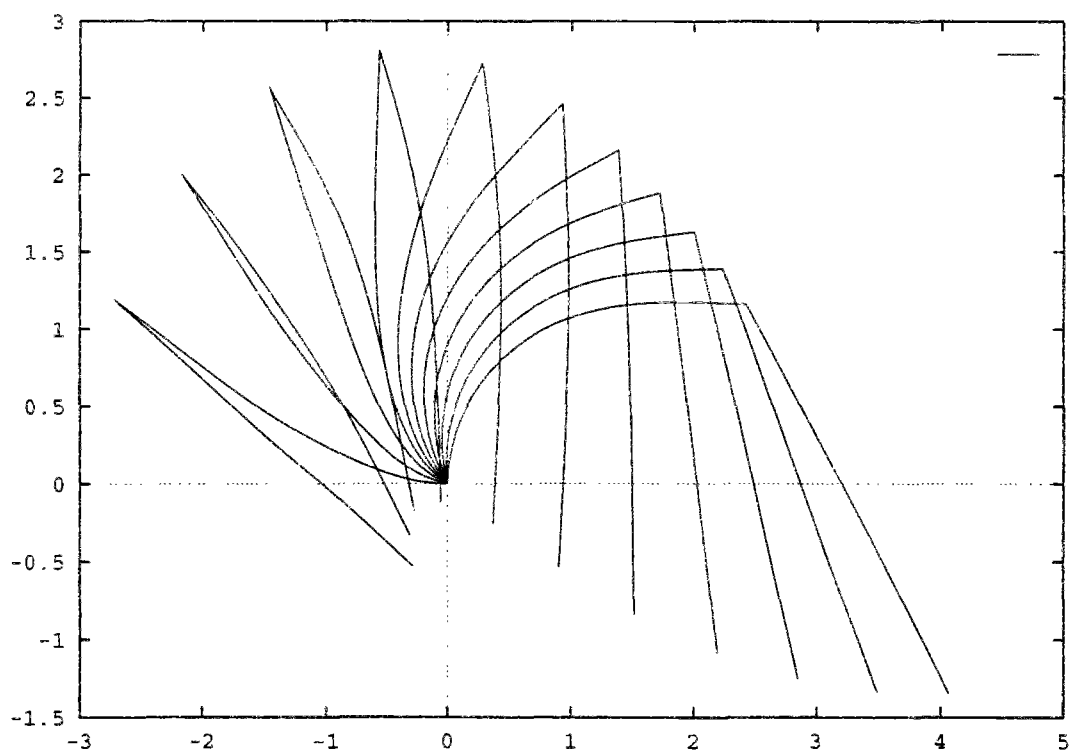
avec :

$$\Phi(t) = \pi t$$

Enfin l'extrémité **C** de la poutre 2 est laissée libre.

Notre maillage est formé de 25 éléments par poutre. Le pas de temps choisi vaut  $\Delta t = 0.05s$ . Nous avons effectué nos tests avec les paramètres suivants, identiques pour les deux poutres :

$$\begin{aligned} EI &= 2000 \, N \times m^2 \\ L &= 3 \, m, \mu S = 7.67 \, kg/m \end{aligned}$$

FIG. 2.9 - Charnière libre - Temps  $[0; 0.5s]$ FIG. 2.10 - Charnière libre - Temps  $[0.5s; 1s]$

## Partie C

### Un problème inverse





## Introduction

Nous nous basons, pour cette étude, sur l'approche convective du problème dynamique. Nous nous plaçons dans le cas d'une **poutre** de longueur  $l$ , encastrée dans un solide rigide animé d'un mouvement de rotation caractérisé par sa vitesse de rotation  $\underline{w}(t)$ , dépendant du temps, et nous considérons la solution

$$\begin{aligned} (\Theta, \vec{U}) : [0; T] &\rightarrow V \\ t &\rightarrow (\theta_1(., t), u_1(., t), u_2(., t), u_3(., t)) \end{aligned}$$

du problème dynamique direct, avec :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in H^1[0, l], v(0) = 0\} \\ V_2 &= \{v \in H^2[0, l], v(0) = 0, v'(0) = 0\} \\ V &= V_1 \times V_1 \times V_2 \times V_2 \end{aligned}$$

Nous nous donnons ensuite une partition régulière de la poutre :

$$\bigcup_{j=1}^M [a_{j-1}, a_j]$$

où les points  $a_0$  et  $a_M$ , ont pour abscisses respectives 0 et  $l$  sur la poutre et nous discrétisons en espace la formulation variationnelle du problème dynamique direct, ce qui nous amène, pour une vitesse de rotation  $\underline{w}(t)$  donnée, au système linéaire :

$$(1.1) \quad [\mathcal{S}_{\underline{w}}] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \ddot{X}_{\underline{w}}(t) + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{X}_{\underline{w}}(t) + \mathbf{K}(\underline{w}) X_{\underline{w}}(t) = \mathbf{F}(\underline{w}) \quad \forall t \in [0, T] \\ X_{\underline{w}}(0) = X_0 \\ \dot{X}_{\underline{w}}(0) = X_1 \end{array} \right.$$

Dans ce qui précède  $X_{\underline{w}}(t)$  est le vecteur des degrés de liberté provenant de la **discrétisation spatiale** du problème dynamique direct. Nous notons  $N DL$  sa longueur. Nous nous intéressons à sa dépendance vis-à-vis de la vitesse angulaire  $\underline{w}$ . Sa définition est licite car le système  $[\mathcal{S}_{\underline{w}}]$  admet une solution unique si certaines conditions de régularité de  $\underline{w}$  sont vérifiées, comme nous le verrons. Nous nous donnons ensuite une fonction objectif **continue**

$$\bar{X} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N DL}$$

qui représente une trajectoire désirée de la structure et nous cherchons à minimiser la fonction

$$(1.2) \quad f(\underline{w}) = \sum_{k=0}^{k=N} \left\| X_{\underline{w}}\left(\frac{kT}{N}\right) - \bar{X}\left(\frac{kT}{N}\right) \right\|_{\mathbb{R}^{N DL}}^2$$

qui quantifie l'écart entre  $X_{\underline{w}}$  et la trajectoire désirée, sur l'espace fonctionnel  $\mathcal{W}$  des vitesses angulaires admissibles, espace que nous préciserons plus loin. Dans l'équation (1.2),  $N$  est le nombre de pas de la discrétisation *en temps* du système  $[\mathcal{S}_{\underline{w}}]$ .

Nous montrerons d'abord que la fonction qui à  $\underline{w}$  associe  $X_{\underline{w}}$  est faiblement continue sur  $\mathcal{W}$ . Par un argument de convexité, nous en déduirons que  $f$  est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{W}$ . Nous concluons à l'existence d'un minimum à l'aide du théorème de Weierstrass.

## Discrétisation spatiale du problème direct

Nous introduisons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in H^1[0, l], v(0) = 0\} \\ V_2 &= \{v \in H^2[0, l], v(0) = 0, v'(0) = 0\} \\ V &= V_1 \times V_1 \times V_2 \times V_2 \end{aligned}$$

Nous définissons ensuite une partition de la poutre :

$$[0, l] = \sum_{j=0}^M [a_{j-1}, a_j] \text{ avec } a_0 = 0 \text{ et } a_M = l$$

On définit alors un espace  $U_h = U_{h1} \times U_{h1} \times U_{h2} \times U_{h2}$  d'éléments finis. Les espaces  $U_{h1}$  et  $U_{h2}$  sont définis de la façon suivante :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}, a_j]$ , les fonctions de  $U_{h1}$  appartiennent à  $P_1([a_{j-1}, a_j])$  ;
- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}, a_j]$ , les fonctions de  $U_{h1}$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}$  et  $a_j$  ;
- $U_{h1} \subset C^0([0, l])$  ;

et :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}, a_j]$ , les fonctions de  $U_{h2}$  appartiennent à  $P_3([a_{j-1}, a_j])$  ;
- Sur chaque intervalle  $[a_{j-1}, a_j]$ , les fonctions de  $U_{h2}$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}$  et  $a_j$  et leurs dérivées premières en ces points ;
- $U_{h2} \subset C^1([0, l])$ .

On définit ensuite un espace d'approximation par :

$$V_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2} \times V_{h2}$$

tel que :

$$\begin{aligned} V_h &\subseteq V \\ V_h &\subseteq U_h \end{aligned}$$

Nous donnons ci-après les expressions des matrices élémentaires servant à construire les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}(\underline{w})$ ,  $\mathbf{K}(\underline{w})$  intervenant dans (1.1) ainsi que celle du second membre élémentaire servant à construire le vecteur  $\mathbf{F}(\underline{w})$ .

On désigne par  $l_j$  la longueur du segment  $[a_j, a_{j+1}]$ . Les autres notations sont celles du chapitre consacré à l'approche convective du problème dynamique direct.

### Matrice M

$$\mathcal{M}^j = \begin{bmatrix} B_{[1,1]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{[2,2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{[3,3]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{[4,4]} \end{bmatrix}$$

avec :

$$B_{[1,1]} = \begin{bmatrix} \frac{\rho S l_j}{3} & \frac{\rho S l_j}{6} \\ \frac{\rho S l_j}{6} & \frac{\rho S l_j}{3} \end{bmatrix}$$

$$B_{[2,2]} = \begin{bmatrix} \frac{\rho J l_j}{3} & \frac{\rho J l_j}{6} \\ \frac{\rho J l_j}{6} & \frac{\rho J l_j}{3} \end{bmatrix}$$

$$B_{[3,3]} = \begin{bmatrix} \frac{13 \rho S l_j^2 + 42 \rho I_2}{35 l_j} & -\frac{84 \rho I_2 - 9 \rho S l_j^2}{70 l_j} & \frac{11 \rho S l_j^2}{210} + \frac{\rho I_2}{10} & -\frac{13 \rho S l_j^2}{420} + \frac{\rho I_2}{10} \\ -\frac{84 \rho I_2 - 9 \rho S l_j^2}{70 l_j} & \frac{13 \rho S l_j^2 + 42 \rho I_2}{35 l_j} & \frac{13 \rho S l_j^2}{420} - \frac{\rho I_2}{10} & -\frac{11 \rho S l_j^2}{210} - \frac{\rho I_2}{10} \\ \frac{11 \rho S l_j^2}{210} + \frac{\rho I_2}{10} & \frac{13 \rho S l_j^2}{420} - \frac{\rho I_2}{10} & \frac{l_j (\rho S l_j^2 + 14 \rho I_2)}{105} & -\frac{l_j (3 \rho S l_j^2 + 14 \rho I_2)}{420} \\ -\frac{13 \rho S l_j^2}{420} + \frac{\rho I_2}{10} & -\frac{11 \rho S l_j^2}{210} - \frac{\rho I_2}{10} & -\frac{l_j (3 \rho S l_j^2 + 14 \rho I_2)}{420} & \frac{l_j (\rho S l_j^2 + 14 \rho I_2)}{105} \end{bmatrix}$$

$$B_{[4,4]} = \begin{bmatrix} \frac{13 \rho S l_j^2 + 42 \rho I_3}{35 l_j} & -\frac{84 \rho I_3 - 9 \rho S l_j^2}{70 l_j} & \frac{11 \rho S l_j^2}{210} + \frac{\rho I_3}{10} & -\frac{13 \rho S l_j^2}{420} + \frac{\rho I_3}{10} \\ -\frac{84 \rho I_3 - 9 \rho S l_j^2}{70 l_j} & \frac{13 \rho S l_j^2 + 42 \rho I_3}{35 l_j} & \frac{13 \rho S l_j^2}{420} - \frac{\rho I_3}{10} & -\frac{11 \rho S l_j^2}{210} - \frac{\rho I_3}{10} \\ \frac{11 \rho S l_j^2}{210} + \frac{\rho I_3}{10} & \frac{13 \rho S l_j^2}{420} - \frac{\rho I_3}{10} & \frac{l_j (\rho S l_j^2 + 14 \rho I_3)}{105} & -\frac{l_j (3 \rho S l_j^2 + 14 \rho I_3)}{420} \\ -\frac{13 \rho S l_j^2}{420} + \frac{\rho I_3}{10} & -\frac{11 \rho S l_j^2}{210} - \frac{\rho I_3}{10} & -\frac{l_j (3 \rho S l_j^2 + 14 \rho I_3)}{420} & \frac{l_j (\rho S l_j^2 + 14 \rho I_3)}{105} \end{bmatrix}$$

Matrice  $C(\underline{w})$

$$C^j = \begin{bmatrix} 0 & B_{[1,2]} & B_{[1,3]} \\ -B_{[1,2]} & 0 & B_{[2,3]} \\ -B_{[1,3]} & -B_{[2,3]} & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$B_{[1,2]} = \begin{bmatrix} -\frac{7 \rho S w_3 l_j}{10} & -\frac{3 \rho S w_3 l_j}{10} & -\frac{\rho S w_3 l_j^2}{10} & \frac{\rho S w_3 l_j^2}{15} \\ -\frac{3 \rho S w_3 l_j}{10} & -\frac{7 \rho S w_3 l_j}{10} & -\frac{\rho S w_3 l_j^2}{15} & \frac{\rho S w_3 l_j^2}{10} \\ -\rho I_3 w_2 & \rho I_3 w_2 & \frac{\rho I_3 w_2 l_j}{6} & -\frac{\rho I_3 w_2 l_j}{6} \\ -\rho I_3 w_2 & \rho I_3 w_2 & -\frac{\rho I_3 w_2 l_j}{6} & \frac{\rho I_3 w_2 l_j}{6} \end{bmatrix}$$

$$B_{[1,3]} = \begin{bmatrix} \frac{7 \rho S w_2 l_j}{10} & \frac{3 \rho S w_2 l_j}{10} & \frac{\rho S w_2 l_j^2}{10} & -\frac{\rho S w_2 l_j^2}{15} \\ \frac{3 \rho S w_2 l_j}{10} & \frac{7 \rho S w_2 l_j}{10} & \frac{\rho S w_2 l_j^2}{15} & -\frac{\rho S w_2 l_j^2}{10} \\ -\rho I_2 w_3 & \rho I_2 w_3 & \frac{\rho I_2 w_3 l_j}{6} & -\frac{\rho I_2 w_3 l_j}{6} \\ -\rho I_2 w_3 & \rho I_2 w_3 & -\frac{\rho I_2 w_3 l_j}{6} & \frac{\rho I_2 w_3 l_j}{6} \end{bmatrix}$$

$$B_{[2,3]} = \begin{bmatrix} -\frac{26 \rho S w_1 l_j}{35} & -\frac{9 \rho S w_1 l_j}{35} & -\frac{11 \rho S w_1 l_j^2}{105} & \frac{13 \rho S w_1 l_j^2}{210} \\ -\frac{9 \rho S w_1 l_j}{35} & -\frac{26 \rho S w_1 l_j}{35} & -\frac{13 \rho S w_1 l_j^2}{210} & \frac{11 \rho S w_1 l_j^2}{105} \\ -\frac{11 \rho S w_1 l_j^2}{105} & -\frac{13 \rho S w_1 l_j^2}{210} & -\frac{2 \rho S w_1 l_j^3}{105} & \frac{\rho S w_1 l_j^3}{70} \\ \frac{13 \rho S w_1 l_j^2}{210} & \frac{11 \rho S w_1 l_j^2}{105} & \frac{\rho S w_1 l_j^3}{70} & -\frac{2 \rho S w_1 l_j^3}{105} \end{bmatrix}$$

### Matrice $\mathbf{K}(\underline{w})$

On remarque que cette matrice n'est pas une matrice symétrique. Nous avons :

$$\mathcal{K}^j = \begin{bmatrix} B_{[1,1]} & B_{[1,2]} & B_{[1,3]} & B_{[1,4]} \\ B_{[2,1]} & B_{[2,2]} & B_{[2,3]} & B_{[2,4]} \\ B_{[3,1]} & B_{[3,2]} & B_{[3,3]} & B_{[3,4]} \\ B_{[4,1]} & B_{[4,2]} & B_{[4,3]} & B_{[4,4]} \end{bmatrix}$$

avec :

$$B_{[1,1]} = -\rho S((w_2)^2 + (w_3)^2)M_{11} + ESM_{11}^p$$

$$B_{[1,2]} = [0]$$

$$B_{[1,3]} = \rho S(-\dot{w}_3 + w_1 w_2)M_{13}$$

$$B_{[1,4]} = \rho S(\dot{w}_2 + w_1 w_3)M_{13}$$

$$B_{[2,1]} = [0]$$

$$B_{[2,2]} = \rho(I_2 - I_3)((w_2)^2 - (w_3)^2) + \rho JM_{11}^p$$

$$B_{[2,3]} = \rho(\dot{w}_3 + w_1 w_2)M_{13}^p$$

$$B_{[2,4]} = \rho(\dot{w}_2 - w_1 w_3)M_{13}^p$$

$$B_{[3,1]} = \rho S(\dot{w}_3 + w_1 w_2)^t M_{13}$$

$$B_{[3,2]} = \rho(I_2 - I_3)(\dot{w}_2 + w_1 w_3)^t M_{13}^p$$

$$B_{[3,3]} = -\rho S((w_3)^2 + (w_1)^2)M_{33} + \rho I_3((w_1)^2 - (w_2)^2)M_{33}^p + EI_3 M_{33}^s$$

$$B_{[3,4]} = \rho S(-\dot{w}_1 + w_2 w_3)M_{33} - \rho I_2(-\dot{w}_1 + w_2 w_3)M_{33}^p$$

$$B_{[4,1]} = \rho S(-\dot{w}_2 + w_1 w_3)^t M_{13}$$

$$B_{[4,2]} = -\rho(I_2 - I_3)(\dot{w}_3 - w_1 w_2)^t M_{13}^p$$

$$B_{[4,3]} = \rho S(\dot{w}_1 + w_2 w_3)M_{33} - \rho I_3(\dot{w}_1 + w_2 w_3)M_{33}^p$$

$$B_{[4,4]} = -\rho S((w_1)^2 + (w_2)^2)M_{33} + \rho I_3((w_1)^2 - (w_3)^2)M_{33}^p + EI_2 M_{33}^s$$

ainsi que :

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{3} & \frac{\nu_i}{6} \\ \frac{l_2}{6} & \frac{l_2}{3} \end{bmatrix}, \quad M_{11}^p = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_j} & -\frac{1}{l_j} \\ -\frac{1}{l_j} & \frac{1}{l_j} \end{bmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} \frac{7l_2}{20} & \frac{3l_2}{20} & \frac{l_2^2}{20} & -\frac{l_2^2}{30} \\ \frac{3l_2}{20} & \frac{7l_2}{20} & \frac{l_2^2}{30} & -\frac{l_2^2}{20} \end{bmatrix}, \quad M_{13}^p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{l_2}{12} & -\frac{l_2}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{l_2}{12} & \frac{l_2}{12} \end{bmatrix},$$

et :

$$M_{33} = \begin{bmatrix} \frac{13l_j}{35} & \frac{9l_j}{70} & \frac{11l_j^2}{210} & -\frac{13l_j^2}{420} \\ \frac{9l_j}{70} & \frac{13l_j}{35} & \frac{13l_j^2}{420} & -\frac{11l_j^2}{210} \\ \frac{13l_j^2}{420} & \frac{11l_j^2}{210} & \frac{l_j^3}{105} & -\frac{l_j^3}{140} \\ -\frac{13l_j^2}{420} & -\frac{11l_j^2}{210} & -\frac{l_j^3}{140} & \frac{l_j^3}{105} \end{bmatrix}, \quad M_{33}^p = \begin{bmatrix} \frac{6}{5l_j} & -\frac{6}{5l_j} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{6}{5l_j} & \frac{6}{5l_j} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2l_j}{15} & -\frac{l_j}{30} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{l_j}{30} & \frac{2l_j}{15} \end{bmatrix},$$

$$M_{33}^s = \begin{bmatrix} \frac{12}{l_j^3} & -\frac{12}{l_j^3} & \frac{6}{l_j^2} & \frac{6}{l_j^2} \\ -\frac{12}{l_j^3} & \frac{12}{l_j^3} & -\frac{6}{l_j^2} & -\frac{6}{l_j^2} \\ \frac{6}{l_j^2} & -\frac{6}{l_j^2} & \frac{4}{l_j} & \frac{2}{l_j} \\ \frac{6}{l_j^2} & -\frac{6}{l_j^2} & \frac{2}{l_j} & \frac{4}{l_j} \end{bmatrix}$$

### Second membre $F(\underline{w})$

Nous avons :

$$\mathcal{F}^j = \left[ B_1 \mid B_2 \mid B_3 \mid B_4 \right] + \delta_j^M F_e$$

avec :

$$\begin{aligned} B_1 &= f_1 F_1 + \rho S((w_2)^2 + (w_3)^2) F_1^x \\ B_2 &= -\rho(J\dot{w}_1 + (I_3 - I_2)w_2 w_3) F_1 \\ B_3 &= f_2 F_3 - \rho S(\dot{w}_3 + w_1 w_2) F_3^x - \rho I_3(\dot{w}_3 - w_1 w_2) F_3^p \\ B_4 &= f_3 F_3 - \rho S(-\dot{w}_2 + w_1 w_3) F_3^x + \rho I_2(\dot{w}_2 + w_1 w_3) F_3^p \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} F_1 &= \left[ \frac{l_j}{2}, \frac{l_j}{2} \right] \\ F_1^x &= \left[ \frac{1}{6}(-2l_j^2 + 3x_2 l_j), \frac{1}{6}(-l_j^2 + 3x_2 l_j) \right] \\ F_3 &= \left[ \frac{l_j}{2}, \frac{l_j}{2}, \frac{l_j^2}{12}, -\frac{l_j^2}{12} \right] \\ F_3^x &= \left[ \frac{1}{60}(-21l_j^2 + 30x_2 l_j), \frac{1}{60}(-9l_j^2 + 30x_2 l_j), \frac{1}{60}(-3l_j^3 + 5x_2 l_j^2), \frac{1}{60}(2l_j^3 - 5x_2 l_j^2) \right] \\ F_3^p &= [-1, 1, 0, 0] \\ F_e &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, \mathcal{F}_1(t), \mathcal{M}_1(t), \mathcal{F}_2(t), \mathcal{M}_3(t), \mathcal{F}_3(t), -\mathcal{M}_2(t)] \end{aligned}$$

### Remarque :

Une étude sommaire de la matrice élémentaire de masse  $\mathcal{M}^j$  montre que ses douze

valeurs propres sont données par :

$$\left[ \begin{array}{l}
 \frac{\rho I_j I_3}{12} + \frac{\rho S l_j}{4} + \frac{S l_j^3 \rho}{120} + \frac{\sqrt{100 \rho^2 l_j^2 I_3^2 - 600 \rho^2 l_j^2 I_3 S + 20 \rho^2 l_j^4 I_3 S + 900 \rho^2 S^2 l_j^2 + 40 \rho^2 l_j^4 S^2 + S^2 l_j^6 \rho^2}}{120} \\
 \frac{\rho I_j I_3}{12} + \frac{\rho S l_j}{4} + \frac{S l_j^3 \rho}{120} - \frac{\sqrt{100 \rho^2 l_j^2 I_3^2 - 600 \rho^2 l_j^2 I_3 S + 20 \rho^2 l_j^4 I_3 S + 900 \rho^2 S^2 l_j^2 + 40 \rho^2 l_j^4 S^2 + S^2 l_j^6 \rho^2}}{120} \\
 \frac{20160 \rho I_3 + 840 l_j^2 \rho I_3 + 2040 S \rho l_j^2 + 20 S l_j^4 \rho + 20 \sqrt{\Delta}}{16800 l_j} \\
 \frac{20160 \rho I_3 + 840 l_j^2 \rho I_3 + 2040 S \rho l_j^2 + 20 S l_j^4 \rho - 20 \sqrt{\Delta}}{16800 l_j} \\
 \frac{\rho I_j I_2}{12} + \frac{\rho S l_j}{4} + \frac{S l_j^3 \rho}{120} + \frac{\sqrt{100 \rho^2 l_j^2 I_2^2 - 600 \rho^2 l_j^2 I_2 S + 20 \rho^2 l_j^4 I_2 S + 900 \rho^2 S^2 l_j^2 + 40 \rho^2 l_j^4 S^2 + S^2 l_j^6 \rho^2}}{120} \\
 \frac{\rho I_j I_2}{12} + \frac{\rho S l_j}{4} + \frac{S l_j^3 \rho}{120} - \frac{\sqrt{100 \rho^2 l_j^2 I_2^2 - 600 \rho^2 l_j^2 I_2 S + 20 \rho^2 l_j^4 I_2 S + 900 \rho^2 S^2 l_j^2 + 40 \rho^2 l_j^4 S^2 + S^2 l_j^6 \rho^2}}{120} \\
 \frac{20160 \rho I_2 + 840 \rho l_j^2 I_2 + 2040 S \rho l_j^2 + 20 S l_j^4 \rho + 20 \sqrt{\Delta}}{16800 l_j} \\
 \frac{20160 \rho I_2 + 840 \rho l_j^2 I_2 + 2040 S \rho l_j^2 + 20 S l_j^4 \rho - 20 \sqrt{\Delta}}{16800 l_j} \\
 \frac{\rho S l_j}{2} \\
 \frac{\rho S l_j}{6} \\
 \frac{\rho J l_j}{2} \\
 \frac{\rho J l_j}{6}
 \end{array} \right]$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \Delta = & 1016064 \rho^2 I_3^2 - 56448 \rho^2 l_j^2 I_3^2 + 205632 \rho^2 l_j^2 I_3 S - 4536 \rho^2 l_j^4 I_3 S + \\
 & 1764 l_j^4 \rho^2 I_3^2 + 84 l_j^6 \rho^2 I_3 S + 10404 \rho^2 l_j^4 S^2 + 120 S^2 l_j^6 \rho^2 + S^2 l_j^8 \rho^2
 \end{aligned}$$

Ces valeurs propres sont strictement positives dans le cas de sections circulaires et rectangulaires, *cas dans lequel nous nous plaçons dans ce chapitre*. Ce résultat persiste si nous tenons compte des conditions aux limites dans l'expression de la matrice élémentaire de masse. La matrice de masse *assemblée*  $\mathbf{M}$  est donc symétrique définie positive, donc en particulier inversible.



## Faible continuité

Nous commençons par démontrer le lemme :

**Lemme 1.5.1** *Si  $\underline{w}$  appartient à l'espace  $\mathcal{W} = H^3(0, T; \mathbb{R}^3)$ , alors le système :*

$$[\mathcal{S}_0] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \ddot{X}_{\underline{w}}(t) + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{X}_{\underline{w}}(t) + \mathbf{K}(\underline{w}) X_{\underline{w}}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \\ X_{\underline{w}}(0) = 0 \\ \dot{X}_{\underline{w}}(0) = 0 \end{array} \right.$$

*admet une solution unique, qui est la solution nulle.*

Démonstration : Le système  $[\mathcal{S}_0]$  peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre, en posant :

$$Y_{\underline{w}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_{\underline{w}}(t) \\ X_{\underline{w}}(t) \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi le système équivalent, de taille  $2 \times NDL$  :

$$[\mathcal{S}'_0] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \dot{Y}_{\underline{w}}(t) + \mathbf{B}(t) Y_{\underline{w}}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \\ Y_{\underline{w}}(0) = 0 \end{array} \right.$$

avec :

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M} & 0 \\ \hline 0 & \text{Id} \end{array} \right]$$

et :

$$\mathbf{B}(t) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C}(\underline{w}) & \mathbf{K}(\underline{w}) \\ \hline \text{Id} & 0 \end{array} \right]$$

D'après l'expression des matrices élémentaires  $\mathcal{C}^j$  et  $\mathcal{K}^j$ , la condition  $\underline{w} \in \mathcal{W}$  entraîne la continuité de l'opérateur  $\mathbf{B}(t)$  sur  $[0; T]$ . De plus, la matrice  $\mathbf{A}$  étant inversible, nous pouvons en conclure (**Avez** [1983]) que le système  $[\mathcal{S}'_0]$  admet une solution unique, qui ne peut être que la solution nulle.

□

**Remarque :** On démontre de la même façon que le système  $[\mathcal{S}_{\underline{w}}]$  admet **une solution unique** si  $\underline{w}$  appartient à l'espace  $\mathcal{W} = \mathcal{H}^3(0, T; \mathbb{R}^3)$

Nous prendrons  $\mathcal{W} = \mathcal{H}^3(0, T; \mathbb{R}^3)$  dans la suite.

Nous considérons maintenant une suite  $(\underline{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\underline{w}_n \rightharpoonup \underline{w} \text{ dans } \mathcal{W} \text{ faible.}$$

Soit  $X_{\underline{w}_n}$  l'unique solution du système  $[\mathcal{S}_{\underline{w}_n}]$  et soit  $X_{\underline{w}}$  l'unique solution du système  $[\mathcal{S}_{\underline{w}}]$ . Nous définissons la suite la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$Y_n = X_{\underline{w}_n} - X_{\underline{w}}$$

La définition de cette suite entraîne que pour tout  $n$ ,  $Y_n$  est solution du système

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{Y}_n(t) + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_n(t) + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_n(t) = \mathbf{F}(\underline{w}_n) - \mathbf{F}(\underline{w}) + [\mathbf{C}(\underline{w}) - \mathbf{C}(\underline{w}_n)] \dot{X}_{\underline{w}_n}(t) \\ \quad + [\mathbf{K}(\underline{w}) - \mathbf{K}(\underline{w}_n)] X_{\underline{w}_n}(t) & t \in [0, T] \\ Y_n(0) = 0 \\ \dot{Y}_n(0) = 0 \end{cases}$$

Puisque

$$\underline{w}_n \rightharpoonup \underline{w} \text{ dans } \mathcal{W} \text{ faible}$$

nous avons également

$$\underline{w}_n \rightharpoonup \underline{w} \text{ dans } H^1(0, T; \mathbb{R}^3) \text{ faible.}$$

Les théorèmes d'injection de Sobolev (**Brézis** [1988]) nous permettent d'affirmer que

$$\underline{w}_n \rightharpoonup \underline{w} \text{ dans } \mathcal{C}^0(0, T; \mathbb{R}^3) \text{ fort}$$

et donc

$$(1.3) \quad \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 (\underline{w}_n)_j (\underline{w}_n)_k \rightharpoonup (\underline{w})_j (\underline{w})_k \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^3) \text{ faible.}$$

Enfin, par définition de la convergence faible, nous avons

$$(1.4) \quad \dot{\underline{w}}_n \rightharpoonup \dot{\underline{w}} \text{ dans } H^2(0, T; \mathbb{R}^3) \text{ faible.}$$

D'après la forme des matrices élémentaires  $\mathcal{C}^j$ ,  $\mathcal{K}^j$  et du second membre élémentaire  $\mathcal{F}^j$ , les convergences (1.3) et (1.4) nous permettent d'affirmer que

$$\mathbf{C}(\underline{w}_n) \rightharpoonup \mathbf{C}(\underline{w}) \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL^2}) \text{ faible}$$

$$\mathbf{K}(\underline{w}_n) \rightharpoonup \mathbf{K}(\underline{w}) \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL^2}) \text{ faible}$$

$$\mathbf{F}(\underline{w}_n) \rightharpoonup \mathbf{F}(\underline{w}) \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) \text{ faible}$$

Nous allons démontrer maintenant le lemme :

**Lemme 1.5.2**

$$\mathbf{M} \ddot{Y}_n + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_n + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) \text{ faible}$$

Démonstration

Nous avons

$$\forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) : \int_0^T \langle \mathbf{F}(\underline{w}_n) - \mathbf{F}(\underline{w}); u \rangle dt \rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow +\infty$$

et

$$\forall M \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL^2}) : \int_0^T \langle\langle \mathbf{C}(\underline{w}_n) - \mathbf{C}(\underline{w}); M \rangle\rangle dt \rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow +\infty$$

ainsi que

$$\forall M \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL^2}) : \int_0^T \langle\langle \mathbf{K}(\underline{w}_n) - \mathbf{K}(\underline{w}); M \rangle\rangle dt \rightarrow 0 \text{ } n \rightarrow +\infty$$

où  $\langle .; . \rangle$  désigne le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^{NDL}$  et où  $\langle\langle .; . \rangle\rangle$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^{NDL^2}$ , à savoir

$$\langle\langle A; B \rangle\rangle = \sum_{\{i,j\}=1,\dots,NDL} A_{[i,j]} B_{[i,j]}.$$

Soit alors  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle \mathbf{M} \ddot{Y}_n + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_n + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_n; u \rangle dt \right| &\leq \left| \int_0^T \langle \mathbf{F}(\underline{w}_n) - \mathbf{F}(\underline{w}); u \rangle dt \right| \\ &+ \left| \int_0^T \langle\langle \mathbf{C}(\underline{w}) - \mathbf{C}(\underline{w}_n); \dot{X}_{\underline{w}_n}(t) \cdot \mathbf{t}_u \rangle\rangle dt \right| \\ &+ \left| \int_0^T \langle\langle \mathbf{K}(\underline{w}) - \mathbf{K}(\underline{w}_n); X_{\underline{w}_n}(t) \cdot \mathbf{t}_u \rangle\rangle dt \right| \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \langle \mathbf{M} \ddot{Y}_n + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_n + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_n; u \rangle dt \right| \leq \\ &\left| \int_0^T \langle \mathbf{F}(\underline{w}_n) - \mathbf{F}(\underline{w}); u \rangle dt \right| \\ &+ \max_{j=1,\dots,NDL} \|(\dot{X}_{\underline{w}_n})_j\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} \sum_{\{i,j\}=1,\dots,NDL} \left| \int_0^T \{ \mathbf{C}_{[i,j]}(\underline{w}) - \mathbf{C}_{[i,j]}(\underline{w}_n) \} u_i dt \right| \\ &+ \max_{j=1,\dots,NDL} \|(X_{\underline{w}_n})_j\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} \sum_{\{i,j\}=1,\dots,NDL} \left| \int_0^T \{ \mathbf{K}_{[i,j]}(\underline{w}) - \mathbf{K}_{[i,j]}(\underline{w}_n) \} u_i dt \right|. \end{aligned}$$

Le lemme 1.5.2 sera démontré si nous parvenons à majorer les deux quantités

$$\max_{j=1,\dots,N_{DL}} \|(X_{\underline{w}_n})_j\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}$$

et

$$\max_{j=1,\dots,N_{DL}} \|(\dot{X}_{\underline{w}_n})_j\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}$$

indépendamment de  $n$ . C'est l'objet du lemme suivant.

**Lemme 1.5.3** *Il existe une constante  $K$  strictement positive et indépendante de  $n$  telle que :*

$$\max_{j=1,\dots,N_{DL}} \|(X_{\underline{w}_n})_j\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} \leq K$$

et

$$\max_{j=1,\dots,N_{DL}} \|(\dot{X}_{\underline{w}_n})_j\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})} \leq K$$

Démonstration (du lemme 1.5.3) :

On reprend les notations du chapitre 1, partie B. On définit l'opérateur

$$\Xi(t, (\Theta_n, \vec{U}_n)(t)) = c((\dot{\Theta}_n, \vec{\dot{U}}_n)(t), (\dot{\Theta}_n, \vec{\dot{U}}_n)(t)) + a_0(t; (\Theta_n, \vec{U}_n)(t), (\Theta_n, \vec{U}_n)(t))$$

où  $(\Theta_n, \vec{U}_n)$  est l'unique solution (voir chapitre 1, partie B) du problème dynamique direct associé à la vitesse angulaire  $\underline{w}_n$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \Xi(t, (\Theta_n, \vec{U}_n)(t)) &= \Xi(0, (\Theta_n, \vec{U}_n)(0)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \sigma} a_0(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)) d\sigma \\ &\quad - 2 \int_0^t a_1(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \vec{\dot{U}}_n)(\sigma)) d\sigma \\ &\quad - 2 \int_0^t b(\sigma; (\dot{\Theta}_n, \vec{\dot{U}}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \vec{\dot{U}}_n)(\sigma)) d\sigma + 2 \int_0^t (\underline{F}_n(\sigma), (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

où  $\underline{F}_n$  désigne l'opérateur second membre du problème dynamique direct associé à la vitesse angulaire  $\underline{w}_n$ , l'indice  $n$  rappelant qu'il dépend notamment de  $\underline{w}_n$ . D'après l'expression des opérateurs  $a_0$ ,  $a_1$  et  $b$  (chapitre 1, partie B), on dispose des majorations :

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial \sigma} a_0(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)) d\sigma - 2 \int_0^t a_1(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \vec{\dot{U}}_n)(\sigma)) d\sigma \right| \\ &\leq \alpha \int_0^t \max(\max_{j,k \in \{1,2,3\}} |(\underline{w}_n)_j(\underline{\dot{w}}_n)_k|, \max_{j \in \{1,2,3\}} |(\underline{\ddot{w}}_n)_j|)(\sigma) \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)\|_V^2 d\sigma \\ &+ \int_0^t \max(\max_{j,k \in \{1,2,3\}} |(\underline{w}_n)_j(\underline{w}_n)_k|, \max_{j \in \{1,2,3\}} |(\underline{\dot{w}}_n)_j|)(\sigma) \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)\|_V \|(\dot{\Theta}_n, \vec{\dot{U}}_n)(\sigma)\|_H d\sigma \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t -2 \int_0^t b(\sigma; (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)) d\sigma \right| \\ & \leq 2\beta \int_0^t \max(\max_{j \in \{1,2,3\}} |(\underline{w}_n)_j|, \sqrt{\sum_{j=1}^3 (\underline{w}_n)_j^2})(\sigma) \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)\|_H^2 d\sigma \end{aligned}$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  désignent des constantes strictement positives dépendant *uniquement* du matériau et de sa géométrie, de sorte que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial \sigma} a_0(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)) d\sigma - 2 \int_0^t a_1(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)) d\sigma \right. \\ & \quad \left. - 2 \int_0^t b(\sigma; (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)) d\sigma \right| \leq \gamma \|\underline{w}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)} \int_0^t \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)\|_H^2 d\sigma \\ & \quad + \alpha \int_0^t \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)\|_V^2 d\sigma \times \max(\|\ddot{u}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\max_{j,k \in \{1,2,3\}} |(\underline{w}_n)_j(\dot{u}_n)_k|\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}) \\ & \quad + \int_0^t \{ \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)\|_V^2 + \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)\|_H^2 \} d\sigma \\ & \quad \times \max(\|\dot{u}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\max_{j,k \in \{1,2,3\}} |(\underline{w}_n)_j(\underline{u}_n)_k|\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R})}) \end{aligned}$$

soit, en se servant de l'injection continue de  $H^1(0,T;\mathbb{R}^3)$  dans  $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)$  (**Bré-**  
**zis** [1988])

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial \sigma} a_0(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)) d\sigma - 2 \int_0^t a_1(\sigma; (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)) d\sigma \right. \\ & \quad \left. - 2 \int_0^t b(\sigma; (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma), (\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)) d\sigma \right| \\ & \leq 2 \max(\alpha, \gamma, 1) \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2) \int_0^T \Phi(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

où on a noté

$$\Phi(\sigma) = \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)\|_V^2 + \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)\|_H^2.$$

D'après le chapitre 1, partie B, nous savons qu'il existe deux constantes strictement positives  $\alpha^*$  et  $\gamma^*$  dépendant uniquement de la géométrie et du matériau et une constante strictement positive  $\lambda^*$  dépendant de  $\underline{w}_n$  telles que

$$\Xi(t, (\Theta_n, \vec{U}_n)(t)) \geq \gamma^* \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(t)\|_H^2 + \alpha^* \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(t)\|_V^2 - \lambda^* \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(t)\|_H^2.$$

Nous savons de plus qu'il existe deux constantes strictement positives  $\beta^*$  et  $K_2$ , dépendant uniquement de la géométrie et du matériau, telles que

$$\Xi(0, (\Theta_n, \vec{U}_n)(0)) \leq \beta^* \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(0)\|_H^2 + (K_2 + \lambda^*) \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(0)\|_V^2.$$

Nous avons en outre

$$\left| 2 \int_0^t (\underline{F}_n(\sigma), (\Theta_n, \vec{U}_n)(\sigma)) d\sigma \right| \leq \int_0^t \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(\sigma)\|_H^2 d\sigma + C_1 + C_2 \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2$$

où  $C_1$  est une constante strictement positive dépendant de la géométrie, du poids propre et des efforts extérieurs appliqués à la structure et  $C_2$  une constante strictement positive dépendant de la géométrie de la poutre et de son matériau constitutif.

Enfin, nous disposons des deux majorations

$$\lambda^* \leq C_3 \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2)$$

et

$$\|(\Theta_n, \vec{U}_n)(t)\|_H^2 \leq C_4 \int_0^T \Phi(\sigma) d\sigma$$

où  $C_3$  et  $C_4$  sont deux constantes strictement positives ne dépendant que de la géométrie de la poutre.

Tous ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \min(\alpha^*, \gamma^*) \Phi(t) &\leq C_3 C_4 \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2) \int_0^T \Phi(\sigma) d\sigma \\ &\quad + (1 + 2 \max(\alpha, \gamma, 1) \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2)) \int_0^T \Phi(\sigma) d\sigma \\ &\quad + C_1 + C_2 \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad + \max(\beta^*, K_2 + C_3 \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2)) \Phi(0) \end{aligned}$$

et donc à l'aide du lemme de Gronwall :

$$(1.5) \quad \forall t \in [0, T] : \Phi(t) \leq C_5 \exp(T C_6)$$

avec

$$\begin{aligned} C_5 &= \frac{1}{\min(\alpha^*, \gamma^*)} \{ \max(\beta^*, K_2 + C_3 \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2)) \Phi(0) \\ &\quad + C_1 + C_2 \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2 \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_6 &= \frac{1}{\min(\alpha^*, \gamma^*)} (C_3 C_4 \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2) \\ &\quad + 1 + 2 \max(\alpha, \gamma, 1) \max(\|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}, \|\underline{w}_n\|_{H^3(0,T;\mathbb{R}^3)}^2)). \end{aligned}$$

Puisque la suite  $(\underline{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement dans  $H^3(0, T; \mathbb{R}^3)$ , elle est bornée *indépendamment de n* dans cet espace. D'après (1.5), il existe donc une constante positive  $K$  indépendante de  $n$  et de  $t$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T] \quad \|(\Theta_n, \vec{U}_n)(t)\|_V &\leq K \\ \|(\dot{\Theta}_n, \dot{\vec{U}}_n)(t)\|_H &\leq K. \end{aligned}$$

Les théorèmes d'injection de Sobolev nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T] \forall s \in [0, l] \quad |(\Theta_n, \vec{U}_n)(s, t)| &\leq K \\ |(\dot{\Theta}_n, \vec{U}_n)(s, t)| &\leq K, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.5.3.

□

D'après le lemme 1.5.3, nous savons que la suite  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée uniformément dans  $H^1(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . D'après le lemme 1.5.2, la suite

$$\{\mathbf{M} \ddot{Y}_n + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_n + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

est bornée uniformément dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . La matrice  $\mathbf{M}$  étant inversible, on en déduit que la suite  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée uniformément dans  $H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . Il existe donc une sous-suite  $\{Y_{m_n}\}_{m_n \in \mathbb{N}}$  qui converge dans  $H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$  faible. Soit  $Y$  sa limite. Nous avons les convergences

$$\dot{Y}_{m_n} \rightharpoonup \dot{Y} \text{ dans } H^1(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) \text{ faible,}$$

et

$$\ddot{Y}_{m_n} \rightharpoonup \ddot{Y} \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) \text{ faible,}$$

et donc

$$\mathbf{M} \ddot{Y}_{m_n} + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_{m_n} + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_{m_n} \rightharpoonup \mathbf{M} \ddot{Y} + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y} + \mathbf{K}(\underline{w}) Y \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) \text{ faible.}$$

D'après les lemmes 1.5.2 et 1.5.1, on en déduit que

$$Y = 0 \text{ dans } \mathcal{H}^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}).$$

Il reste à montrer que c'est toute la suite  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement vers 0 dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$  et non pas une simple sous-suite.

On raisonne par l'absurde et on fait l'hypothèse

$$[\mathbf{H}] : \exists u^* \in H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}), \exists \epsilon^* > 0, \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n :$$

$$\left| \int_0^T \{\mathbf{M} \ddot{Y}_m + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_m + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_m\} \cdot u^* dt \right| > \epsilon^*.$$

Ceci nous permet de construire une sous-suite  $\{Y_{m_n}\}$  de la suite  $\{Y_n\}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \left| \int_0^T \{\mathbf{M} \ddot{Y}_{m_n} + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_{m_n} + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_{m_n}\} \cdot u^* dt \right| > \epsilon^*$$

Cette sous-suite est bornée uniformément dans  $H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ , on peut donc en extraire une sous-suite  $\{Y_{m_{n_k}}\}$  faiblement convergente dans  $H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . Soit  $Y^*$  sa limite faible dans  $H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . On peut alors montrer, toujours d'après les lemmes 1.5.2 et 1.5.1, que

$$Y^* = 0 \text{ dans } H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}),$$

et donc

$$\begin{aligned} & \forall u \in H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}), \forall \epsilon > 0, \exists i \in \mathbb{N}, \forall j \geq i : \\ & \left| \int_0^T \{ \mathbf{M} \ddot{Y}_{(m_{n_k})_j} + \mathbf{C}(\underline{w}) \dot{Y}_{(m_{n_k})_j} + \mathbf{K}(\underline{w}) Y_{(m_{n_k})_j} \} \cdot u \, dt \right| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse [H]. Ceci démontre la faible continuité de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{W} & \rightarrow H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) \\ \underline{w} & \rightarrow X_{\underline{w}} \end{aligned}$$

## Existence du minimum

La fonction

$$\begin{aligned} H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ X & \rightarrow \sum_{k=0}^{k=N} \|X(\frac{kT}{N}) - \bar{X}(\frac{kT}{N})\|^2_{\mathbb{R}^{NDL}} \end{aligned}$$

est convexe et continue sur  $H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . Elle est donc séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur  $H^2(0, T; \mathbb{R}^{NDL})$ . Par composition, on en déduit que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{W} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{w} & \rightarrow \sum_{k=0}^{k=N} \|X(\underline{w}, \frac{kT}{N}) - \bar{X}(\frac{kT}{N})\|^2_{\mathbb{R}^{NDL}} \end{aligned}$$

est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{W}$ . Nous avons donc le théorème :

**Théorème 1.5.1** *La fonction  $f$  définie par (1.2) admet un minimum sur toute partie bornée de  $\mathcal{W}$ .*





## Conclusion

---

Au cours de ce travail, nous avons étudié deux types de problèmes liés à des chaînes ouvertes de corps élancés.

Pour le premier type de problème (*problèmes directs*), le chargement de la structure est une donnée du problème et on cherche la position (cas statique) ou la trajectoire (cas dynamique) de l'ensemble ou d'un point particulier de la structure.

Pour le second type (*problèmes inverses*), on souhaite imposer une position donnée, ou une trajectoire donnée, à un point particulier de la structure et on cherche le chargement extérieur à imposer.

Pour modéliser les corps de la chaîne, nous avons choisi des modèles de poutres, en grands déplacements et en petites déformations. Nous avons envisagé deux grands types de modélisations :

- Une modélisation, dite *convective*, où les déplacements élastiques d'un corps de la chaîne sont mesurés dans un repère solide de ce corps, dont le mouvement caractérise le grand déplacement rigide de la chaîne.
- Une modélisation, dite *globale*, de type géométriquement exacte, où le déplacement global d'un corps de la chaîne est mesuré dans un repère de référence.

Nous avons fait des hypothèses d'ordre géométrique et mécanique sur notre modèle de jonction :

- **Hypothèse géométrique :** Les articulations sont du type pivot ou sphérique : les seuls mouvements relatifs possibles sont des mouvements de rotation.
- **Hypothèse mécanique :** Les articulations transmettent les efforts et les déplacements. Nous supposons également que s'exerce aux articulations des moments proportionnels aux rotations articulaires.

Nous nous sommes attachés à élaborer une formulation mécanique claire des problèmes rencontrés et à leur donner un cadre mathématique.

Nous avons, dans certains cas, proposé une méthodologie de résolution numérique

simple et efficace, méthodologie que nous avons validée sur plusieurs exemples tests.

Les contributions nouvelles de ce travail sont les suivantes :

- **Approche convective**

- **Problème direct**

- Pour le cas statique, nous avons élargi à un contexte tridimensionnel l'étude mathématique et numérique réalisée par **Fayolle** [1987]. Nous avons en particulier élaboré un modèle mécanique de jonctions, effectué l'étude mathématique et implémenté un nouvel élément de raccord de poutres dans la bibliothèque Modulef.

- Pour le cas dynamique, nous avons effectué l'étude mathématique d'un problème de jonctions de poutres élastiques animées de grands mouvements rigides.

- **Problème inverse**

- Nous avons traité l'étude mathématique d'un cas simplifié de problème inverse : le cas d'une seule poutre entraînée en rotation. Nous avons montré qu'il est possible de minimiser sur l'espace des vitesses angulaires admissibles, un critère concernant le suivi d'une trajectoire par l'extrémité libre de la poutre.

- **Approche globale**

- Nous n'avons traité, pour cette approche, que les problèmes directs, statique et dynamique. Nous avons élaboré un modèle mécanique de jonction qui est physiquement réaliste et qui se prête bien à l'analyse mathématique du problème. Pour le cas statique, nous avons ainsi généralisé au cas de jonctions, l'étude mathématique de **Mani** [1987]. Nous avons également élaboré un traitement numérique simple et efficace, valable aussi bien en statique qu'en dynamique.

Les perspectives d'extension de ce travail sont, par exemple :

- Traitement mathématique et numérique de problèmes de jonctions plus généraux (jonctions plaques/poutres par exemple), ceci grâce à l'approche globale, qui nous paraît très fructueuse.
- Traitement de problèmes inverses, ou de problèmes de contrôle à l'aide de l'approche globale.
- Traitement de conditions de raccord plus générales pour des problèmes de jonction 1D/1D, avec en particulier la prise en compte éventuelle de translations relatives.

- Généralisation des lois de comportement utilisées pour pouvoir traiter le cas de matériaux composites, piézoélectriques etc..



# Références Bibliographiques

ABRAHAM R., ROBBIN J. [1967]: *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, New York.

AGRAWAL O.P., SHABANA A.A. [1985]: *Dynamic Analysis of Multibody Systems using Components Modes*, Computers and Structures, Vol. 21, pp. 1303-1312.

AGRAWAL O.P., SHABANA A.A. [1986]: *Application of deformable-body mean axis to flexible multibody systems dynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 56, pp. 217-245.

ANTMAN S.S., KENNEY C.S. [1981]: *Large Buckled States of Nonlinearly Elastic Rods under Torsion, Thrust and Gravity*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 76, pp. 289-338.

ARGYRIS J. [1982]: *An Excursion into Large Rotations*, Computer Methods in Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 85-155.

ARTOLA M., CESSENAT M., DAUTRAY R., LIONS J.L., SCHEURER B. [1988.8]: *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques, Volume 8: Évolution: Semi-Groupe, Variationnel*, Masson, Paris.

AVEZ A. [1983]: *Calcul différentiel*, Masson, Paris.

BATHE K.J., BOLOURCHI S. [1979]: *Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures*, Int. Journal Num. Meth. Eng., Vol. 14, pp. 961-986.

BATHE K.J. [1982]: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey.

BECK M. [1955]: *Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion*; Ingenieur-Archiv, XXIII. Band, Viertes Heft, pp. 231-253.

- BELYTCHKO T., KLEIN M.J., SCHWER L. [1977]: *Large Displacement Transient Analysis of Space Frames*, International Journal for Numerical Methods and Engineering, Vol. 11, pp. 65-84.
- BERGER M., GOSTIAUX B. [1988]: *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, Coll. "Graduate Texts in Mathematics", Springer Verlag.
- BERNADOU M., FAYOLLE S., LÉNÉ F. [1989]: *Numerical Analysis of Junctions between Plates*, Computer Methods in Applied Mathematics and Engineering, Vol. 74, pp. 307-326.
- BERNADOU M., GEORGE P.L., HASSIM A., JOLY P., LAUG P., PERRONNET A., SALTEL E., STEER D., VANDERBORCK G., VIDRASCU M. [1985]: *Une bibliothèque modulaire d'éléments finis*, INRIA.
- BISSHOPP K.E., DRUCKER D.C. [1945]: *Large Deflection of Cantilever Beams*, Quarterly of Applied Math., Vol. 311, n° 3.
- BOURGAT J.F., LE TALLEC P., MANI S. [1988]: *Modélisation et calcul des grands déplacements de tuyaux élastiques en flexion-torsion*, Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 7, n° 4, pp. 379-408.
- BRÉZIS H. [1983]: *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris.
- CARDONA A., GÉRADIN M. [1988]: *A beam finite element non-linear theory with finite rotations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, pp. 2403-2438.
- CARDONA A., GÉRADIN M. [1989]: *Kinematics and Dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra*, Computational Mechanics, Vol.4, pp. 115-135.
- CEMAL ERINGEN A., ŞUHUBI E. S. [1975]: *Elastodynamics, Vol. II: Linear Theory*, Academic Press.
- CHRISTENSEN E.R., LEE S.W. [1986]: *Nonlinear Transient Finite Element Analysis with Convected Coordinates*, Computers and Structures, Vol. 23, pp. 819-829.
- CHIOU J.C., DOWNER J.D., PARK K.C. [1992]: *Dynamics of flexible beams for multibody systems: A computational procedure*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.96, pp. 373-408.

CHOQUET-BRUHAT Y., DE WITT-MORETTE C., DILLARD-BLEICK M. [1977]: *Analysis, Manifolds and Physics*, North Holland.

CIARLET [1978]: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York.

CIARLET [1988]: *Mathematical Elasticity - Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications, Volume 20, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo.

COMPE C., GEORGE P.L., ROUSSELET B., VIDRASCU M. [1986]: *Les éléments de poutre en élasticité linéaire de la Bibliothèque Modulef*, INRIA-Rocquencourt - Rapport de Recherche n° 562.

DENAVIT J., HARTENBERG R.S. [1955]: *A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices*, Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, pp. 215-221.

DOMBRE E., KHALIL W. [1988]: *Modélisation et commandes des robots*, Hermès, Paris.

DOWNER J.D. [1990]: *A Computational Procedure for the Dynamics of Flexible Beams within Multibody Systems*, PhD Thesis, University of Colorado.

DYM C.L., SHAMES I.H. [1973]: *Solid Mechanics: a variational approach*, McGraw Hill.

FAYOLLE S. [1987]: *Sur l'analyse numérique des raccords de poutres et de plaques*, Thèse de troisième cycle de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.

FRAEIJIS DE VEUBEKE B. [1976]: *The Dynamics of Flexible Bodies*, Int. J. Engineering Science, Vol. 14, pp. 895-913.

GEORGE P.L. [1985]: *Problèmes évolutifs*, Rapport MODULEF n° 63, INRIA, 1985.

GLOWINSKI R., LE TALLEC P. [1989]: *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics* SIAM Studies in Applied Mathematics.

GOLDSTEIN H. [1980]: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley.



HARTOCH G., MCGHEE R.B., ORIN D.E., VUKOBRA-TOVIĆ M. [1979]: *Kinematic and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing Newton-Euler methods*, Mathematical Biosciences, Vol. 43, pp. 107-130.

HAUG E.J., YOO W.S. [1986]: *Dynamics of Articulated Structures, Part I: Theory and Part II: Computer Implementation and Applications*, Journal of Structure Mechanics, Vol. 14, pp. 105-126 et 177-189.

HUGHES T.J.R., WINGET J. [1980]: *Finite Rotation Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive equations Arising in Large Deformation Analysis*, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 15, pp. 1413-1418.

IMAM E. [1981]: *Contribution à l'étude dynamique des mécanismes déformables*, Thèse de Docteur-Ingénieur de l'Ecole Centrale de Lyon ; Université Lyon 1.

KANE T., LEVINSON D. [1981]: *Simulation of Large Motions of Nonuniform Beams in Orbit: Part II - The Unrestrained Beam*, J. Astronautical Sciences, Vol. 29, pp. 245-275.

KHALIL W., KLEINFINGER J.F. [1986]: *A new geometric notation for open and closed loop robots*, Proc. IEEE Conference on Robotics and Automation, San Francisco, pp. 1174-1180.

KHALIL W., KLEINFINGER J.F. [1987]: *Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree structure robots*, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-3(6), pp. 582-588.

LAGNESE J., LEUGERING G., SCHMIDT G. [à paraître]: *On a three dimensional Timoshenko beam model and non planar networks of such beams*.

LE BORGNE M. [1987]: *Quaternions et contrôle sur l'espace des rotations*, INRIA-Rennes - Rapport de Recherche n° 751.

LE TALLEC P., MANI S., ROCHINHA F.A. [1992]: *Finite element computation of hyperelastic rods in large displacements*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 26, n° 5, pp. 595-625.

LIONS J.L., MAGENES E. [1968]: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris.

- MALVERN L.E. [1969]: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey.
- MANI S. [1987]: *Modélisation et analyse numérique des problèmes d'équilibre d'une barre élastique en grandes déformations*, Thèse de troisième cycle de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- MEGAHED S. [1984]: *Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots manipulateurs ayant une structure de chaîne cinématique simple ou complexe; application à leur commande*, Thèse d'État, Université P. Sabatier, Toulouse.
- PAUL R.C.P. [1981]: *Robot manipulators: mathematics, programming and control*, MIT Press.
- PIEPER D.L. [1968]: *The kinematics of manipulators under computer control*, PhD Thesis, Stanford University, Stanford.
- PÖSCHEL J., TRUBOWITZ E. [1985]: *Inverse Spectral Theory*, Coll. "Pure and Applied Mathematics", Vol. 130, Academic Press.
- RENAUD M. [1985]: *A near minimum iterative analytical procedure for obtaining a robot-manipulator dynamic model*, IUTAM/IFTOMM Symp. on Dynamics of Multi-body Systems, Udine.
- RENAUD M. [1987]: *Quasi minimal computation of the dynamic model of a robot manipulator utilizing the Newton-Euler formalism and the notion of augmented body*, Proc. IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, pp. 1677-1682.
- REYES-AVILA L. [1990]: *Quaternions: une représentation paramétrique systématique des rotations finies*, INRIA-Rocquencourt - Rapport de Recherche n° 1303.
- SALENÇON J. [1988]: *Mécanique des milieux continus - Tome II: Elasticité, milieux curvilignes*, Cours de l'Ecole Polytechnique.
- SCIAVICCO L., SICILIANO B. [1987]: *An inverse kinematic solution algorithm for dexterous redundant manipulators*, Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Advanced Robotics, ICAR'87, Versailles, pp. 247-256.
- SIMO J. [1985]: *A Finite Strain Beam Formulation. The three-dimensional Dynamic Problem - Part I*; Comp. Meth. App. Mech. Eng., Vol. 49, pp. 55-70.
- SIMO J., VU-QUOC L. [1986.1]: *On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case: Part I*; Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 849-863.

SIMO J., VU-QUOC L. [1986.2]: *A Three Dimensional Finite-Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects*; Comp. Meth. App. Mech. Eng., Vol. 58, pp. 79-116.

SPURRIER R.A. [1978]: *Comment on "Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction-Cosine Matrix"*, Journal of Spacecrafts and Rockets, Vol. 15, p. 255.

STUELPNAGEL J. [1964]: *On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group*, SIAM Review, Vol. 6, pp. 422-430.

ZIEGLER H. [1952]: *Knickung gerader Stäbe unter Torsion*; ZAMP, Vol. 3, pp. 96-119.

# Annexe A

## Représentation des rotations finies

Une rotation est une matrice  $3 \times 3$ , comportant a priori *neuf* composantes indépendantes. Cependant, en tant qu'élément du groupe  $\mathcal{SO}(3)$ , elle doit vérifier *six* conditions non-linéaires, traduisant l'orthonormalité de ses vecteurs-lignes (par exemple). La recherche d'un paramétrage minimal - comprenant un nombre de paramètres le plus proche possible de trois - a donné lieu à de nombreuses recherches. On peut dégager trois grandes étapes successives, correspondant à trois grands types de paramétrisation.

### A.1 Angles d'Euler

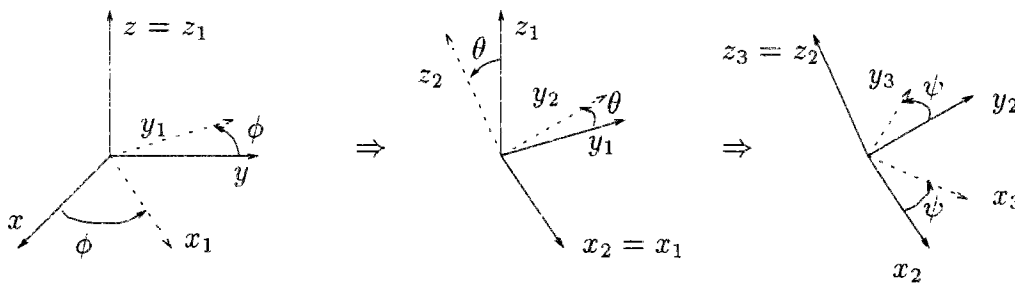


FIG. A.11 - Angles d'Euler

Comme le montre la figure, on utilise, pour passer de la base  $(x, y, z)$  d'origine à la base  $(x_3, y_3, z_3)$  finale, une succession de trois rotations, caractérisées par les angles  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . La rotation finale est donc la composée d'une rotation d'angle  $\phi$  selon  $z$ , d'une rotation d'angle  $\theta$  selon  $x_1$  et d'une rotation d'angle  $\psi$  selon  $z_2$ . L'expression

finale de la rotation  $\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi)$  est donc :

$$\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soit, sous forme développée :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\phi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\psi) \sin(\phi) + \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ -\sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) & \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

L'écriture de cette représentation est assez lourde. En outre, ce n'est pas une représentation intrinsèque : il existe d'autres conventions de représentation avec les angles d'Euler, qui correspondent à un ordre différent dans la composition des trois rotations mises en jeu (**Goldstein** [1980]). En outre, lorsque l'on veut traiter numériquement des équations où interviennent des rotations finies, il n'est pas souhaitable de faire intervenir des fonctions trigonométriques - et encore moins des produits de fonctions trigonométriques - dans les formulations. Citons enfin un autre inconvénient de cette représentation : il est nécessaire, toujours pour des considérations numériques, de pouvoir passer facilement d'une matrice de rotation donnée à la valeur de ses paramètres caractéristiques. Or il est bien connu que l'extraction des trois angles d'Euler à partir de la donnée de la matrice de rotation n'est pas possible pour certaines matrices - et qu'il existe des zones d'instabilité numérique pour ce calcul.

## A.2 Vecteur-rotation

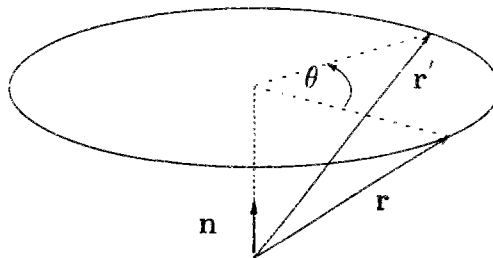


FIG. A.12 - Vecteur-rotation

Soit  $\mathbf{R}$  une rotation. D'après le théorème d'Euler-Chasles, il existe un unique vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  et un unique angle  $\theta$  tels que  $\mathbf{R}$  soit la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe

dirigé par  $\mathbf{n}$ . Nous avons donc ici - contrairement au cas des angles d'Euler - une représentation *intrinsèque* des rotations. On montre que la rotation  $\mathbf{R}$  admet les deux représentations matricielles équivalentes :

$$(A.6) \quad \mathbf{R} = \mathcal{I}d + \frac{\sin(\theta)}{\theta} {}^t\tilde{\Theta} + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \tilde{\Theta} \cdot \tilde{\Theta}$$

et :

$$(A.7) \quad \mathbf{R} = \exp({}^t\tilde{\Theta})$$

où on a noté :

$$\Theta = \theta \mathbf{n} = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]$$

et :

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 0 & -\Theta_1 \\ -\Theta_2 & \Theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équivalence entre les représentations (A.6) et (A.7) est notamment prouvée par **Argyris** [1982].

Cette représentation, bien que séduisante par son caractère intrinsèque, présente elle-aussi des défauts. La relation liant une rotation donnée à ses paramètres caractéristiques est très non-linéaire - et les non-linéarités ne sont toujours pas algébriques. De plus le problème des singularités dans le passage d'une rotation à ses paramètres caractéristiques n'est toujours pas résolu. On peut même montrer que, *quelle que soit la paramétrisation choisie*, les singularités seront présentes si le nombre de paramètres caractéristiques vaut *trois* ... C'est l'objet du paragraphe qui va suivre.

Nous allons donner ici les grandes lignes d'une démonstration écrite dans **Stuelp-nagel** [1964]. Le résultat qu'il énonce est le suivant :

**Théorème A.2.1** *Il n'existe pas d'homéomorphisme de  $\mathcal{SO}(3)$  vers  $\mathbb{R}^3$ .*

Démonstration : Nous savons (**Berger & Gostiaux** [1988]) que  $\mathcal{SO}(3)$  est une variété de dimension 3. Tout point  $r$  de  $\mathcal{SO}(3)$  admet donc un voisinage  $U_r$  homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . S'il existait un homéomorphisme  $h$  de  $\mathcal{SO}(3)$  vers  $\mathbb{R}^3$ , alors - par un théorème dû à Brouwer -  $h(U_r)$  serait un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . L'espace  $h(\mathcal{SO}(3)) = \bigcup_{r \in \mathcal{SO}(3)} h(U_r)$  serait alors lui aussi un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  - et un compact, en

tant qu'image continue du compact  $\mathcal{SO}(3)$ . Or, on sait que  $\mathbb{R}^3$  ne contient pas de sous-espace ouvert compact - d'où la contradiction.

## A.3 Quaternions

### A.3.1 Le corps des quaternions

On définit sur l'ensemble  $\mathbb{R}^4$ , les deux opérations suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \oplus (a, b, c, d) &= (\alpha + a, \beta + b, \gamma + c, \delta + d) \\ 2) \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \otimes (a, b, c, d) &= (\alpha * a - \beta * b - \gamma * c - \delta * d, \\ &\quad \alpha * b + \beta * a + \delta * c - \gamma * d, \\ &\quad \alpha * c + \beta * d + \gamma * a - \delta * b, \\ &\quad \alpha * d - \beta * c + \delta * a + \gamma * b) \end{aligned}$$

**Théorème A.3.1** *Le triplet  $\mathcal{Q} \equiv (\mathbb{R}^4, \oplus, \otimes)$  est un corps non commutatif*

En effet,  $(\mathbb{R}^4, \oplus)$  étant un groupe additif, il reste à montrer que  $(\mathbb{R}^4, \otimes)$  est un groupe non commutatif, ce qui est immédiat. L'élément neutre de ce groupe est  $(1, 0, 0, 0)$  et l'inverse multiplicatif d'un élément non nul  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  de  $\mathcal{Q}$  est :

$$p' = \frac{1}{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} * (p_0, -p_1, -p_2, -p_3)$$

Le corps  $\mathcal{Q}$  est appelé **corps des quaternions**. Il contient un sous-corps commutatif  $\mathcal{Q}_R$ , formé de tous les multiples réels de l'élément neutre et qui est isomorphe à  $\mathbb{R}$ . Il contient également un sous-espace vectoriel  $\mathcal{Q}_V$ , identifié à  $\mathbb{R}^3$ , formé de tous les éléments de  $\mathcal{Q}$  ayant 0 pour première composante. Tout élément  $p$  de  $\mathcal{Q}$  s'écrit sous la forme de la somme d'un élément  $p_R$  de  $\mathcal{Q}_R$  et d'un élément  $p_V$  de  $\mathcal{Q}_V$ , cette décomposition étant unique.

Cette identification nous permet d'ailleurs d'interpréter le produit de deux quaternions en utilisant le produit scalaire et le produit vectoriel usuels de  $\mathbb{R}^3$ .

Nous avons en effet le résultat :

**Théorème A.3.2** *Étant donnés  $(p, q) \in \mathcal{Q}^2$ , nous pouvons représenter  $s = p \otimes q$  sous la forme :*

$$s = s_R + s_V$$

où :

$$s_R = p_R * q_R - \langle p_V, q_V \rangle$$

et

$$s_V = p_R * q_V + q_R * p_V + p_V X q_V$$

$\langle ., . \rangle$  et  $X$  étant respectivement les produits scalaires et vectoriels usuels précités.

On parlera dans la suite de *partie vectorielle* de  $p \in \mathcal{Q}$  pour désigner l'élément de  $\mathcal{Q}_V$  associé à  $p$ .

Enfin, il est intéressant pour la suite d'introduire le produit externe (scalaire) sur  $\mathcal{Q}$  et sa norme associée  $\| \cdot \|_{\mathcal{Q}}$  : Si  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  et  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$  sont deux éléments de  $\mathcal{Q}$ , on définit :

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{Q}} = \sum_{i=1}^4 p_i * q_i$$

et la norme associée :

$$\| p \|_{\mathcal{Q}} = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

### A.3.2 Représentation paramétrique des rotations

Nous allons maintenant donner une représentation sous forme paramétrique des rotations ; pour cela nous avons besoin de définir une endoapplication de  $\mathcal{Q}$  préservant le produit scalaire sur  $\mathcal{Q}$ . Cette application est définie, d'une manière analogue à ce qui a été fait par **Le Borgne** [1987], par :

$$\rho(p, \cdot) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$$

$$q \rightarrow \rho(p, q) = p \otimes q \otimes p^{-1}$$

ceci pour tout  $p$  non nul dans  $\mathcal{Q}$ .

Nous avons alors le résultat immédiat suivant :

**Théorème A.3.3** *La transformation  $\rho(p, \cdot) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  ainsi définie est linéaire, orthogonale et son image est incluse dans  $\mathcal{Q}_V$*

En outre, en recherchant les images par  $\rho$  de la base canonique de  $\mathcal{Q}$ , on obtient la représentation matricielle suivante :

$$M_{\rho(p, \cdot)} = \tilde{I} + \frac{2}{\| p \|_{\mathcal{Q}}^2} * (\tilde{W} \circ \tilde{W} + p_0 * \tilde{W})$$

où  $\tilde{I}$  est l'identité de  $\mathbb{R}^4$  et où :

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 & 0 \\ p_3 & 0 & -p_1 & 0 \\ -p_2 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, posant  $\tilde{I}_R = e_1 \otimes e_1$  (produit tensoriel) et  $\tilde{F} = M_{\rho(p, \cdot)} - \tilde{I}_R$ , nous allons pouvoir donner une représentation des rotations dans  $\mathbb{R}^3$  ; en effet, nous allons prouver que



$\tilde{F}$  s'identifie, à un isomorphisme près, à un élément de  $\mathcal{SO}(3)$ .

Nous savons déjà que  $M_{\rho(p,.)}$  est une transformation orthogonale sur  $\mathcal{Q}$ ; on vérifie facilement que l'on a aussi :

$$\det(M_{\rho(p,.)}) = 1$$

On conclut alors en observant que l'application :

$$T : L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$$M \rightarrow P.M.P$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de  $L_0(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  vers  $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  avec :

$$L_0(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) = (M \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4); M_{1,j} = 0 \quad j = 1 \cdots 4, M_{i,1} = 0 \quad i = 1 \cdots 4)$$

Nous devons maintenant donner une interprétation des coefficients d'un quaternion en fonction des valeurs caractéristiques (axe, angle) de la rotation qu'il représente. A cette fin, nous énonçons sans le démontrer le résultat fondamental suivant :

**Théorème A.3.4** Soit  $\theta \in [0, (2n+1)\pi[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathcal{Q}_V$  tel que  $\|\mathbf{n}\| = 1$ . Alors le quaternion  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  avec  $p_0 = \mathbb{R} - (0)$  et

$$\bar{p}_V = \pm \frac{\|p\|_{\mathcal{Q}}^2}{2 * p_0} * \sin(\theta) * \mathbf{n}$$

est tel que :

$$\rho(p, \bar{w}) = \mathbf{n}$$

En outre,  $p_0$  satisfait l'équation :

$$4 * p_0^4 - 4 * \|p\|_{\mathcal{Q}} * p_0^2 * \cos(\theta) - \|p\|_{\mathcal{Q}}^4 * \sin^2(\theta) = 0$$

On trouvera les détails de la démonstration dans **Reyes-Avila** [1990].

Ainsi, le quaternion  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  représentant la rotation d'angle  $\theta \in [0, (2n+1)\pi[$  d'axe  $\mathbf{n}$  (normé) s'exprimera sous la forme :

$$p_0 = \pm \|p\|_{\mathcal{Q}} * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$p_v = \pm \|p\|_Q \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n}$$

la norme du quaternion étant arbitraire.

### Les représentations courantes

Les quaternions fournissent une représentation *intrinsèque* des rotations et les non-linéarités qui apparaissent entre une rotation et son quaternion caractéristique sont *algébriques*. Cependant, comme la *norme* de ce quaternion est arbitraire, un certain nombre de paramétrisations ont été introduites, qui ne diffèrent que par la valeur attribuée à cette norme [ou à la partie vectorielle du quaternion, ce qui est équivalent d'après le théorème (A.3.4)]. Les trois principales sont :

1. **Paramètres de Rodrigues.** Ce paramétrage a été introduit à l'origine pour tenter de pallier aux défauts de la paramétrisation par vecteurs-rotations en ce qui concerne le problème des singularités. Au lieu de se servir du vecteur :

$$\Theta = \theta \mathbf{n}$$

on employait le vecteur :

$$\Theta_r = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n}$$

pour écrire l'analogue de l'équation (A.6). Cette paramétrisation entre dans le cadre des paramétrisations par quaternions. Il suffit de choisir  $\Theta_r$  comme partie vectorielle du quaternion associé à la rotation, la norme de ce quaternion valant alors  $\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ .

Cependant le problème de singularité persiste, notamment au voisinage de  $\theta = \pi$ .

2. **Conformal Rotation Vector [CRV].** Ce choix, introduit dans Cardona & Géradin [1989], consiste    prendre pour partie vectorielle du quaternion le vecteur :

$$\Theta_c = 4 \tan\left(\frac{\theta}{4}\right) \mathbf{n}$$

La norme du quaternion est :

$$\|p\|_Q = \frac{2}{\cos^2(\frac{\theta}{4})}$$

3. **Paramètres d'Euler (quaternion unitaire).** Il s'agit du choix de partie vectorielle et de norme le plus simple :

$$\Theta_e = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n}$$

$$\|p\|_Q = 1$$

Les deux dernières représentations sont d'un intérêt équivalent du point de vue du problème des singularités - et du point de vue du nombre de paramètres utiles du paramétrage. Il existe cependant un algorithme très simple d'extraction du quaternion unitaire à partir de l'expression de la matrice de rotation (**Spurrier** [1978]).

**Remarque** La représentation par quaternions unitaires n'est pas une représentation bijective elle ne l'est plus. En effet, il est facile de montrer que si le quaternion  $q$  représente la rotation  $R$ , alors le quaternion  $-q$  représente également la rotation  $R$ . Nous avons déjà vu qu'il était impossible d'obtenir une représentation bijective de  $SO(3)$  avec trois paramètres réels. On peut se demander s'il existe aussi une représentation non bijective de  $SO(3)$  avec trois paramètres, qui ne présenterait pas de singularités et serait donc plus avantageuse que les quaternions. Toujours d'après **Stuelpnagel** [1964], ceci est impossible : en effet, le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  contenant les paramètres représentatifs devrait être un recouvrement de  $SO(3)$  et il est connu que les seuls recouvrements de  $SO(3)$  sont la sphère-unité de  $\mathbb{R}^4$  (paramétrée à l'aide de 4 paramètres) et  $SO(3)$  lui-même.

## Résumé

Nous nous intéressons, dans ce travail, aux chaînes ouvertes de corps élastiques, animés de grands mouvements rigides. Nous considérons deux types de problèmes : problème direct où on recherche les déplacements de la chaîne à chargement connu, problème inverse où la donnée est une position ou une trajectoire de l'extrémité terminale de la chaîne et où on recherche le chargement à imposer pour obtenir cette position ou cette trajectoire.

Nous supposons que les corps de la chaîne sont bien modélisés par des poutres élastiques et nous étudions deux types de modélisations : une modélisation linéaire (approche *convective*) où les petits déplacements élastiques sont mesurés par rapport à un repère flottant qui suit les mouvements rigides des poutres de la chaîne et une modélisation non-linéaire (approche *globale*) où l'on n'effectue pas, au niveau de la formulation mécanique, de découplage entre déplacement élastique et déplacement rigide.

Notre travail comporte la formulation mécanique et l'étude mathématique du problème direct dans les cas statiques et dynamiques, ce dans le cadre de l'approche convective et de l'approche globale, ainsi que l'étude mathématique d'un problème inverse dynamique simplifié.

Nous avons en outre réalisé un traitement numérique simple et efficace du problème direct, ce dans le cas statique pour l'approche convective et dans les cas statiques et dynamiques pour l'approche globale.

**Mots-clés :** Elasticité linéaire, élasticité non-linéaire, poutres, grands déplacements, jonctions, variétés différentielles, éléments finis, élément de raccord, problème inverse.